10 進数 ～左にどこまでも続く数～

羊 飼

概要

我々は縦書きのわり算を小学校で学び、例えば 1 ÷ 7 の場合

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & \;0.142857\cdots \\
7 & \overline{)\;1.000000} \\
 & \;\underline{\;7\;} \\
 & \;\;\;30 \\
 & \;\;\;\underline{28} \\
 & \;\;\;\;\;20 \\
 & \;\;\;\;\;\underline{14} \\
 & \;\;\;\;\;\;\;60 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\underline{56} \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;40 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{35} \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{49} \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1
\end{array}
$$

のように、商として「右」にどこまでも数字が並ぶ無限循環小数が出てくることを知っている。また、“1”を“1.000000 ⋯ ”と見なして計算していることに注目してみると、「この表記の“ ⋯ ”の部分は無限に 0 が続く」ことと「0 は（位取りに必要なとき以外は）書かなくてよい」ことを我々が暗黙のうちに了承していることがわかる。

では、「右」に 0 を並べる代わりに「左」に並べて、“1”を“ ⋯ 0000001”と見なすことはできないだろうか。

おそらく多くの人は“1”をこのように表記することをそもそも無意味だと感じるであろう。しかし我々が“ ⋯ 0000001”という表記に違和感を覚えるのは、あくまで「このような表記を今まで見たことがない」ことに起因しているにすぎない。“1”を“1.000000 ⋯ ”と見なすことが縦書きのわり算に使われていたことは既に見た通りなので、同様に“1”を“ ⋯ 0000001”と見なすことによって新しい「数」の世界が構築できないだろうか。そう思って考察を重ねた結果、0 を左につけるだけの一見無意味な表記にとどまらず、常識的には「数」とは認めがたい“ ⋯ 2857143”のような「左にどこまでも続く数」にもある程度の正当性を見出せることがわかった。またその一方で、逆にこのような数の限界も見えてきた。

以下は、その考察の結果を（途中までだが）まとめたものである。

1　わり算の原理と無限小数展開

比較のため、まずは既によく知っている「小数」について考察したい。我々は先の $\frac{1}{7} = 0.142857\cdots$ のような「右にどこまでも続く」無限小数は何の抵抗もなく扱っている。

前述のような「縦書きのわり算」がどのような原理でなされているのか、話がややこしくなるのを承知の上で敢えて掘り下げてみる。

まず、次の定理が成り立つ。これはわり算の原理そのものである。

定理 1

任意の自然数 a, b に対して、

$$a = qb + r\ ,\quad 0 \leqq r < b$$

なる整数 q, r がただ一つ存在する。

（証明は初等整数論の本などに委ねる）

実は縦書きのわり算では、この $a = qb + r$ をさらに $a = qb + 0.1 \times 10r$ と書き換え、$10r$ と b に対してこの定理を再度適用する、という作業を繰り返しているにすぎない。具体的には、例えば $1 \div 7$ の場合は次のような作業を行っているに等しい：

$$\begin{aligned}
1 &= 7 \times 0 + 0.1 \times 10\\
10 &= 7 \times 1 + 0.1 \times 30\\
30 &= 7 \times 4 + 0.1 \times 20\\
20 &= 7 \times 2 + 0.1 \times 60\\
60 &= 7 \times 8 + 0.1 \times 40\\
40 &= 7 \times 5 + 0.1 \times 50\\
50 &= 7 \times 7 + 0.1 \times 10
\end{aligned}$$

これらの式を順次下から上に代入していけば、

$$1 = 7 \times (0 + 0.1 + 0.04 + 0.002 + 0.0008 + 0.00005 + 0.000007 + \cdots)$$

すなわち $\frac{1}{7} = 0.142857\cdots$ が導かれるのである。

なお、この計算を続けると小数第 7 位以降の“$\cdots$”の部分には“142857”という数字の列が繰り返されること、すなわちこれが循環小数であることも簡単な考察でわかる。

ところで、いま考えている「分数→無限循環小数」の逆、すなわち無限循環小数を分数に書き直す方法もよく知られている。例えば $0.121212\cdots$ を分数に書き直したければ、$x = 0.121212\cdots$ とおいて両辺を 100 倍して $100x = 12.121212\cdots$, これらを辺々引けば $99x = 12$ なので $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$, すなわち $0.121212\cdots = \frac{4}{33}$ とわかる。

2　もう一つの定理

また、上述の定理 1 とは別に、次の定理もよく知られている。

定理 2

任意の互いに素な 2 つの整数 a, b と、それらと無関係な整数 s に対して、

$$s = am + bn\ , \quad 0 \leqq m < b$$

なる整数 m, n がただ一つ存在する。

（証明は初等整数論の本などに委ねる）

実は、この定理の $b = 10$ の場合を使って先ほどと似たような計算をしてみると、とても興味深い結果が得られるのである。例として、$a = 7,\ s = 1$ の場合を考えてみると、

$$\begin{aligned}
1 &= 7 \times 3 + 10 \times (-2) \\
-2 &= 7 \times 4 + 10 \times (-3) \\
-3 &= 7 \times 1 + 10 \times (-1) \\
-1 &= 7 \times 7 + 10 \times (-5) \\
-5 &= 7 \times 5 + 10 \times (-4) \\
-4 &= 7 \times 8 + 10 \times (-6) \\
-6 &= 7 \times 2 + 10 \times (-2)
\end{aligned}$$

これらの式を順次下から上に代入していけば、

$$1 = 7 \times (3 + 40 + 100 + 7000 + 50000 + 800000 + 2000000 + \cdots)$$

となる。もちろん、右辺の (　) の中は明らかに無限大に発散してしまうのだが、しかしここで敢えて位（くらい）を揃えて“ 形式的な ”計算をしてみると、

$$\frac{1}{7} = \cdots 2857143$$

という結果が得られる。

なお、この計算を続けると 8 桁目（けため）（一千万の位（くらい））以降の“ $\cdots$ ”の部分には“ 285714 ”という数字の列が繰り返されることも簡単な考察でわかる。

もちろん我々は、ここに現れたような「左にどこまでも続く数」を「数」とは普通は見なさないのだから、「無限大に発散することがわかっている無意味な計算を形式的にしたからおかしな結果が出てしまった」と考察を終わらせることもできよう。しかし、今まで見たことがないことを理由にこの結果を排除するよりは、今までの常識になかった「新たな数」となりうるのかどうかを考察する方が遥かに建設的であろう。

3　無限循環 10 進数のいくつかの例

「右にどこまでも続く数」には「無限小数」という名前が付いている。以後「左にどこまでも続く数」を「10 進数」と呼び、また、数を 10 進数に書き直すことを「無限 10 進展開」と呼ぶことにする（私としては、「無限小数」の対義語ということで「無限大数」とでも名付けたいところだが、現代数学において重要な役割を果たしている「p 進数」なる概念との関連で、こう名付ける）。

ところで先ほど出てきた“ $\cdots 2857143$ ”は、“ 1 ”を“ $\cdots 0000001$ ”と見なすのと同じようには受け入れることができないので、他のアプローチを試みる必要がある。

そもそも“ $\cdots 2857143$ ”は、$\dfrac{1}{7}$ と等しい「数」として我々の前に姿を見せたのであった。そこで、“ $\cdots 2857143$ ”を 7 倍することを試してみよう。

$$\begin{array}{rr} & \cdots 2857142857143 \\ \times\,) & 7 \\ \hline & \cdots 0000000000001 \end{array}$$

ここに答えとして現れた“ $\cdots 0000001$ ”を“ 1 ”と見なすことは先に述べた通りであるから、“ $\cdots 2857143$ ”は確かに「7 をかけると 1 になる数」、すなわち $\dfrac{1}{7}$ と等しいと見なして差し支えないと言えそうである。

ところで定理 2 の $b = 10$ 場合を考えたとき、a が 10 と互いに素である必要があったので、ここまでの議論は「分母が 2 の倍数でも 5 の倍数でもない既約分数」についてしか適用できない。そこで工夫を施して拡張したいのだが、実はそれは容易である。分母が 2 や 5 の倍数である場合は、例えば $\dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{1} \times 10^{-1}$, $\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3} \times 10^{-1}$ などのように

（分母が 2 の倍数でも 5 の倍数でもない既約分数）$\times$（10 の累乗）

と書き換えることができるので、この分数を無限 10 進展開したあとに小数点を移動すればよいのである。すると、$\dfrac{1}{5} = 0.2$ のように、我々の常識と合致する結果が出てくることもあるが、これは $\dfrac{1}{5} = \cdots 000000.2$ と書き直すことによって無限循環 10 進数と見なすことができる。

以上により、全ての正の有理数は無限 10 進展開が可能であることがわかった。

次に、負の数について考えたい。

まずはじめに、最も容易であろう -1 について考えよう。-1 が答えとなる計算式として「$0-1$」がある。我々は $100 - 1 = 99$, $10000 - 1 = 9999$, $1000000 - 1 = 999999$ のような計算を知っている。これらの「引かれる数」の“ 0 ”の個数と「答え（差）」に出てくる“ 9 ”の個数が同じであることに注目し、0 を $\cdots 0000000$ と見なした上でこれにも同じ「ルール」を適用して、

$$\begin{array}{r}
\cdots 000000 \\
-)\qquad\qquad 1 \\ \hline
\cdots 999999
\end{array}$$

と計算することはできないだろうか。

もちろんこの計算はかなり乱暴であり、とても正しくは見えないかもしれない。しかし、そもそも $b-a$ というひき算の「意味」が「$\boxed{}+a=b$ なる $\boxed{}$ を求めること」であることを思い出せば、実際に

$$\begin{array}{r}
\cdots 999999 \\
+)\qquad\qquad 1 \\ \hline
\cdots 000000
\end{array}$$

となるのだから、$0-1=\cdots 999999$、すなわち $-1=\cdots 999999$ と結論づけても良さそうである。

今度は $\cdots 999999$ を 2 乗してみよう。

$$\begin{array}{r}
\cdots 999999 \\
\times)\ \cdots 999999 \\ \hline
\cdots 999991 \\
\cdots 999991 \\
\cdots 999991 \\
\cdots 999991 \\
\cdots\cdots \\ \hline
\cdots 000001
\end{array}$$

この結果は“1”と同一視できるので、我々が知っている $(-1)^2=1$ とも合致する。ますます $-1=\cdots 999999$ の正当性が高まったように感じられるだろう。

ところで、先ほどの $0-1=\cdots 999999$ のような計算を許せば、$1\div 7$ は次のように「縦書きのわり算」ができる。

$$\begin{array}{r}
\cdots 2857143 \\ \hline
\cdots 0000001\,(\,7 \\
\underline{21} \\
98 \\
\underline{28} \\
97 \\
\underline{7} \\
99 \\
\underline{49} \\
95 \\
\underline{35} \\
96 \\
\underline{56} \\
94 \\
\underline{14} \\
8
\end{array}$$

結果はむろん今までと同じである。この例では、7×0〜7×9 の答え（積）の一の位（くらい）に 0〜9 がすべて出現することによって、どこまでも計算し続けることが保証される。

しかしわる数が 2 または 5 の倍数であるときにはこうはいかない。(2 の倍数) $\times$ 0〜(2 の倍数)$\times$9 の答え（積）の一の位には偶数 (0, 2, 4, 6, 8) しか現れないし、(5 の倍数)$\times$0〜(5 の倍数) $\times$ 9 の答え（積）の一の位には 0 と 5 しか現れないからであるが、ほんの少しの工夫によって、このような場合でも新たな縦書きのわり算が可能となる。

例えば $3 \div 2$ の場合は、2×1〜2×9 の答え（積）の一の位には 3 が出てこないが、次のように計算することができる。

まず、3 を 3.0 とみなす。一の位が 0 になるのは 2×0 と 2×5 の 2 つがあるが、2×0 を使うと

$$\begin{array}{l} 0 \\ \hline 3.0\ (\ 2 \\ 0 \\ \hline 3 \end{array}$$

となって行き詰まってしまうのに対し、2×5 を使うと

$$\begin{array}{l} 1.5 \\ \hline 3.0\ (\ 2 \\ 1\,0 \\ \hline 2 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

となる。

今の例 $(3 \div 2)$ の場合に限らず、この方法はわる数が 2 または 5 の倍数であるときに常に可能である（これは証明を要する命題だが、ここでは割愛させていただく）。

ところで、ここで得られた $3 \div 2 = 1.5$ という結果は我々の常識と一致している。実は、わる数が 2 と 5 以外の素因数を含んでいない場合は、この「新たな縦書きのわり算」でも我々の常識と一致する結果が出るのである。そして逆に、わる数が 2 と 5 以外の素因数を含んでいる場合には、この「新たな縦書きのわり算」では「無限循環 10 進数」が得られる。ちなみに普通のわり算では、わる数が 2 と 5 以外の素因数を含んでいる場合に無限循環小数になる。

わる数	普通の縦書きのわり算	新たな縦書きのわり算
2 と 5 以外の素因数を含まない	有限（結果が一致）	
2 と 5 以外の素因数を含む	無限循環小数	無限循環 10 進数

さて、ここまでの考察で、無限循環 10 進数は（$\cdots 2857143 = \dfrac{1}{7}$ のように）分数を表すこともあれば（$\cdots 999999 = -1$ のように）負の数を表すこともあることがわかったので、最後に、ここまで考察してきた「分数→無限循環 10 進数」の逆、すなわち無限循環 10 進数を分数に書き直すことを考えたい。

これは容易で、小数のときと同様の方法をそのまま適用できる。

例えば $x = \cdots 999999$ は、両辺を 10 倍して $10x = \cdots 9999990$, これらを辺々引けば $-9x = 9$ なので $x = \dfrac{9}{-9} = -1$, すなわち $\cdots 999999 = -1$ となる。同様に $x = \cdots 2857142857143$ は、両辺を 1000000 倍してから辺々引けば $999999x = 142857$ なので $x = \dfrac{142857}{999999} = \dfrac{1}{7}$, すなわち $\cdots 2857142857143 = \dfrac{1}{7}$ となる。

2 つの例を試みたが、どちらの場合も先の結果と一致した。

こうしてみると、無限循環 10 進数はやはり「数」と見なしてもよさそうに思える。これら「左にどこまでも続く数」は、(「負の数」や「虚数」がそうであったように) 心理的な抵抗さえ克服できれば受け入れることができる「新しい数」なのだろうか。

ここまでは例を絞って考察してきたが、他の有理数に対しても同様の考察ができる。

以下、結果のみを書き並べるが、少しでも興味を持った人、あるいは疑問を抱いた人は、ぜひ自身の手を動かして確認していただきたい。実際に手を動かしてみれば、これら「無限循環 10 進数」が確かに実在する、という実感を持てることと思う。

分母 (わる数) が 9 の場合を見てみよう。以下は、前述の「新たな縦書きのわり算」によって得られた無限 10 進展開である。

$$1/9 = \cdots 8888888888889.$$
$$2/9 = \cdots 7777777777778.$$
$$3/9 = \cdots 6666666666667.$$
$$4/9 = \cdots 5555555555556.$$
$$5/9 = \cdots 4444444444445.$$
$$6/9 = \cdots 3333333333334.$$
$$7/9 = \cdots 2222222222223.$$
$$8/9 = \cdots 1111111111112.$$

我々は当然 $\dfrac{1}{9} + \dfrac{8}{9} = 1$, $\dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{9} = \dfrac{7}{9}$, $\dfrac{2}{9} \times 4 = \dfrac{8}{9}$ などの周知の結果を期待するが、ちょっと計算してみれば分かるとおり、期待通りの結果が得られる (確認せよ)。

ところで、上の一覧には分子が 1〜8 のものしかないが、

$$\frac{11}{9} = \frac{2}{9} + 1 = \cdots 7777778 + 1 = \cdots 7777779$$

のように、上の一覧の右辺の値に整数を加えることによって分母が 9 の分数の値はすべて求めることができる。もちろん負の分数についても同様である。

ここで、特に $-\frac{1}{9}$ について考察してみよう。

まず第一に、$-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}-1$ なので、

$$-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}-1=\cdots 111112-1=\cdots 111111$$

と計算できる。

また、$-\frac{1}{9}=-1\div 9$ であり、また $-1=\cdots 999999$ であることを使えば、

$$-\frac{1}{9}=-1\div 9=\cdots 999999\div 9=\cdots 111111$$

と計算することも可能である。

そしてさらには、$-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\times(-1)$ であることを使って、

$$-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\times(-1)=\cdots 888889\times\cdots 999999$$

と計算してもよい（結果は次の通りで、やはり $\cdots 111111$ となる）。

$$\begin{array}{r}
\cdots 888889\\
\times)\ \underline{\cdots 999999}\\
\cdots 000001\\
\cdots 000001\\
\cdots 000001\\
\cdots 000001\\
\cdots\cdots\\
\hline
\cdots 111111
\end{array}$$

以上、3 通りの方法で $-\frac{1}{9}$ の無限 10 進展開を試みたが、いずれの方法でも $\cdots 111111$ なる結果が得られた。

また、上の一覧より $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\cdots 666667$ であるから、これを使えば $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ なることも確認できる。

$$\begin{array}{r}
\cdots 666667\\
\times)\ \underline{\cdots 666667}\\
\cdots 666669\\
\cdots 000002\\
\cdots 000002\\
\cdots 000002\\
\cdots\cdots\\
\hline
\cdots 888889
\end{array}$$

こうしていろいろ試してみると、これはもはや「偶然」ではなく「必然」としか考えられない、すなわち“左にどこまでも続く数”の存在は疑いようがない、と思えるに違いない。また逆に、猜疑心が強い人ならば何が何でも反例を見つけてみたくなるかもしれない。この寄稿の最後に、分母が 2 から 7 までの分数の無限 10 進展開を付録として載せて

おく（そして望むのであれば、分母が 8 以上の分数の場合の無限 10 進展開もすぐにできる)。ぜひ、いろいろな組み合わせの加法・減法・乗法を試し、“左にどこまでも続く数”の実在感を味わってほしい。

今回、10 進数に関する考察に時間を割(さ)きすぎ、まとめる時間があまりとれなくなってしまったため、本当はもっと考察は進んでいるのだが本稿はここで終わる。続きはまた次号に寄稿したい。

参考文献

以下の中では、唯一 **[1]** にのみ 10 進数に関する記述がある。他はすべて p 進数に関する参考文献である（今回の寄稿に直接活かせなかったものも含む)。

[1] 大森英樹/矢崎芳則 『平面人からの手紙（上・下)』岩波書店, 1993

[2] 山口周『高校・大学生に役立つ新しい整数論』, 現代数学社, 1998

[3] 加藤和也「宇宙が先か素数が先か」(朝日新聞社『数学ゲンダイ（朝日ワンテーママガジン 1, 1993)』より）

[4] 田口雄一郎「p 進数」(日本評論社『数学セミナー 1996 年 4 月号』より）

[5] エビングハウス他『数（上・下)』(成木勇夫訳）, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1991

[6] 加藤和也/黒川信重/斎藤毅『数論 1』(岩波講座現代数学の基礎）, 岩波書店, 1996

[7] ポントリーギャン『数概念の拡張』(宮本敏雄訳）, 森北出版, 1995

[8] 高木貞治『代数的整数論』岩波書店, 1971

[9] 加藤和也『解決！フェルマーの最終定理』, 日本評論社, 1995

付録：分母が 2〜7 の既約分数の無限 10 進展開

これらはすべて、本文中に解説されている「新たな縦書きのわり算」によって求められた無限循環 10 進数である。

$$1/2 = \cdots 0000000000000.5$$
$$1/3 = \cdots 6666666666667.$$
$$2/3 = \cdots 3333333333334.$$
$$1/4 = \cdots 0000000000000.25$$
$$3/4 = \cdots 0000000000000.75$$
$$1/5 = \cdots 0000000000000.2$$
$$2/5 = \cdots 0000000000000.4$$
$$3/5 = \cdots 0000000000000.6$$
$$4/5 = \cdots 0000000000000.8$$
$$1/6 = \cdots 3333333333333.5$$
$$5/6 = \cdots 6666666666667.5$$
$$1/7 = \cdots 2857142857143.$$
$$2/7 = \cdots 5714285714286.$$
$$3/7 = \cdots 8571428571429.$$
$$4/7 = \cdots 1428571428572.$$
$$5/7 = \cdots 4285714285715.$$
$$6/7 = \cdots 7142857142858.$$

手間はほとんどかからないので、ぜひ自分の手を動かして、次に挙げるいくつかの等式（および我々が期待する他の等式）が常に成り立つことを確認してほしい。

(1) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

(2) $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1,\ \frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1,\ \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$

(4) $\frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7},\ \frac{1}{7} \times 3 = \frac{3}{7},\ \frac{1}{7} \times 4 = \frac{4}{7},\ \cdots$

(5) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(6) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(7) $\frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$