「極方程式」の学習で押さえるべきたった2つの要点

参拾萬数学工房

本稿では，現在出版されている教科書・参考書・問題集でほとんど言及されていない2つのことを述べる。

以下，極座標系を導入した平面において，極方程式 $f(r, \theta) = 0$ が表す図形を F とする。また，極座標が $(1, 0)$ である点を A_0 とする。

要点その１：極方程式の本質（図形の拡大縮小と回転）

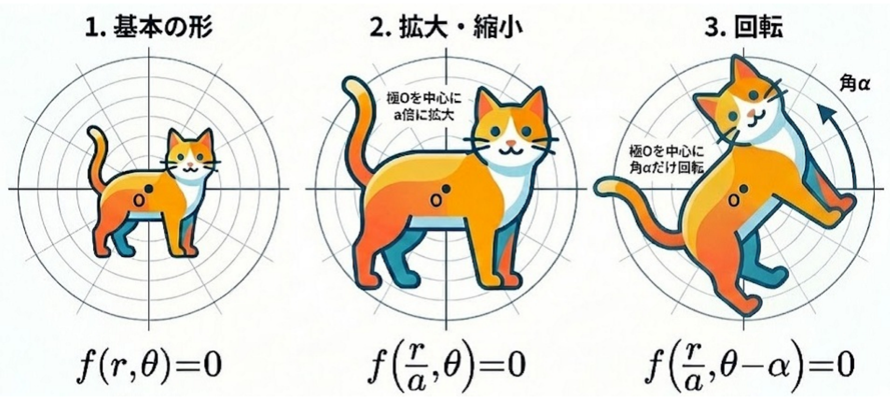
極方程式において，次の2つの定理が本質である。

定理１（図形の拡大縮小） $a \in \mathbb{R}$（ただし $a \neq 0$）のとき，極方程式 $f\left(\dfrac{r}{a}, \theta\right) = 0$ は，「極Oを基準として図形 F を a 倍した図形」を表す。
※ただし，$a < 0$ の場合は，極Oに関して反対側に $|a|$ 倍した図形となる。

定理２（図形の回転） $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき，極方程式 $f(r, \theta - \alpha) = 0$ は，「極Oを中心として図形 F を角 α だけ回転した図形」を表す。

定理1と定理2を組み合わせれば，次のことが言える。

定理１＆２（図形の拡大縮小＆回転） $a \in \mathbb{R}$（ただし $a \neq 0$），$\alpha \in \mathbb{R}$ のとき，極方程式 $f\left(\dfrac{r}{a}, \theta - \alpha\right) = 0$ は，「図形 F を極Oを基準として a 倍し，極Oを中心として角 α だけ回転した図形」を表す。



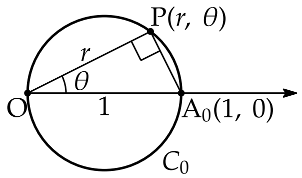
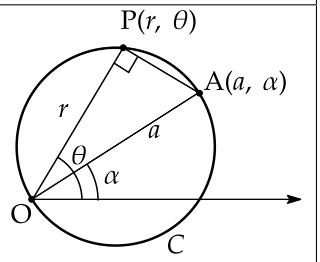
（NotebookLMで生成した画像をNano Banana Proで編集）

【例 1】　$a > 0$ とする。

「点 A の極座標が $(a,\ \alpha)$ で，線分 OA を直径とする円 C」は，「線分 OA_0 を直径とする円 C_0 $\boxed{r = \cos\theta}$ を，極 O を基準として a 倍し，極 O を中心として角 α だけ回転させた図形」であるから，極方程式は

$$\boxed{\frac{r}{a} = \cos(\theta - \alpha)}$$

となる。（これは，教科書に記載されている公式 $\boxed{r = a\cos(\theta - \alpha)}$ と同値である。）

$r = \cos\theta$	$\dfrac{r}{a} = \cos(\theta - \alpha)$
	

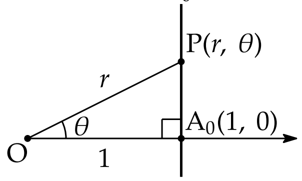
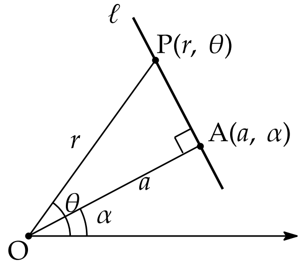
■

【例 2】　$a > 0$ とする。

「極座標が $(a,\ \alpha)$ である点 A を通り，直線 OA に垂直な直線 ℓ」は，「点 A_0 を通り，直線 OA_0 に垂直な直線 ℓ_0 $\boxed{r\cos\theta = 1}$ を，極 O を基準として a 倍し，極 O を中心として角 α だけ回転させた図形」であるから，極方程式は

$$\boxed{\frac{r}{a}\cos(\theta - \alpha) = 1}$$

となる。（これは，教科書に記載されている公式 $\boxed{r\cos(\theta - \alpha) = a}$ と同値である。）

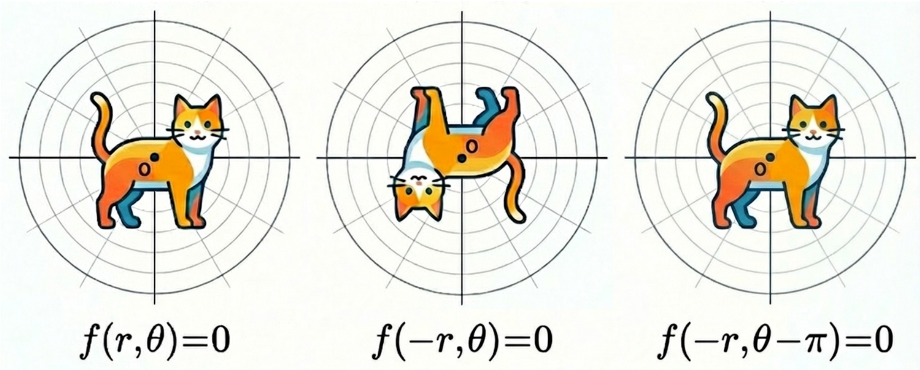
$r\cos\theta = 1$	$\dfrac{r}{a}\cos(\theta - \alpha) = 1$
	

■

要点その２：極方程式 $f(-r, \theta-\pi)=0$ が表す図形

ところで，定理１の $a=-1$ の場合と定理２の $\alpha=\pi$ の場合は，ともに極 O に関して対称な図形を表す。よって，この２つを合成することにより，次の 定理３が得られる。

定理３（同一の図形） 極方程式 $f(-r, \theta-\pi)=0$ は，同一の図形 F を表す。



（NotebookLM で生成した画像を Nano Banana Pro で編集）

【例 3】 $e>0$ とする。

「点 A_0 を通り，OA_0 に垂直な直線」を ℓ_0 とするとき，「極 O からの距離と直線 ℓ_0 からの距離の比が $e:1$ である点 P の軌跡として求まる曲線」は，極方程式

$$\boxed{r=\frac{e}{1+e\cos\theta}}$$

で表される２次曲線である。そして，これの r を $-r$ に，θ を $\theta-\pi$ にそれぞれ置き換えた式 $-r=\dfrac{e}{1+e\cos(\theta-\pi)}$，すなわち

$$\boxed{r=\frac{-e}{1-e\cos\theta}}$$

もまた，同一の曲線を表す。 ■

＊　＊　＊

以上，強引に３ページにまとめた。詳細な論旨は別稿『**極方程式論考（I）**』を参照していただきたい。

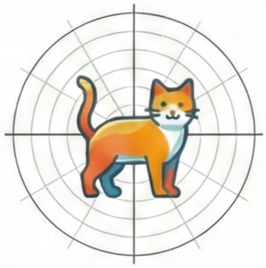
また，次のページは，本稿の「要点その１」の内容を元にして NotebookLM に生成させたインフォグラフィックである。ただし，文字化けが多く含まれていたため，多々修正した。

極座標におけるグラフの回転と拡大・縮小

極方程式の変換ルール

「極方程式 $f(r,\ \theta)=0$ が表す図形」を，極 O を基準として a 倍し，極 O を中心として角 α だけ回転させると，変換後の図形は極方程式 $f\left(\dfrac{r}{a},\ \theta-\alpha\right)=0$ で表される。

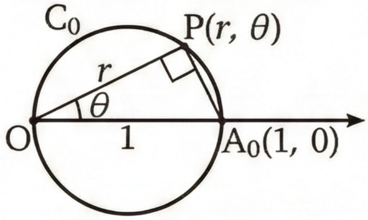
変換前 (Before)



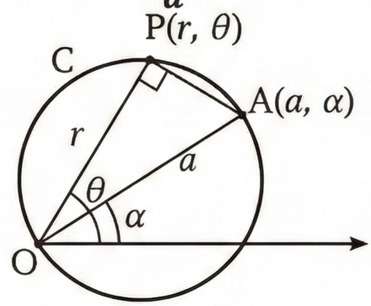
変換後 (After)

例1：円の変換

変換前の円：$r=\cos\theta$



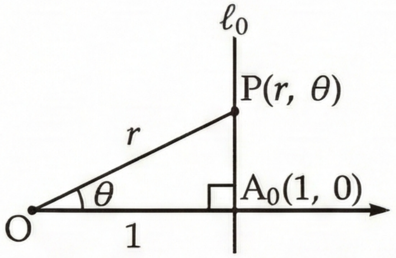
変換後の円：$\dfrac{r}{a}=\cos(\theta-\alpha)$



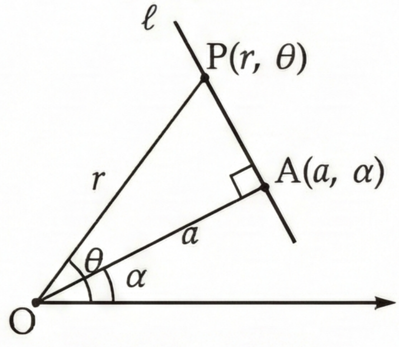
「点 A の極座標が $(a,\ \alpha)$ で，線分 OA を直径とする円 C」は、極座標 $(1,\ 0)$ の点を A_0 とするとき，「線分 OA_0 を直径とする円 $r=\cos\theta$ を，極 O を基準として a 倍し，極 O を中心として角 α だけ回転させた図形」

例2：直線の変換

変換前の直線：$r\cos\theta=1$



変換後の直線：$\dfrac{r}{a}\cos(\theta-\alpha)=1$



「極座標 $(a,\ \alpha)$ の点 A を通り，直線 OA に垂直な直線 ℓ」は，「極座標 $(1,\ 0)$ の点 A_0 を通り，直線 OA_0 に垂直な直線 $r\cos\theta=1$ を，極 O を基準として a 倍し，極 O を中心として角 α だけ回転させた図形」