三角関数の諸公式の「図による証明」

参拾萬数学工房
(http://www.300000.net/)

はじめに

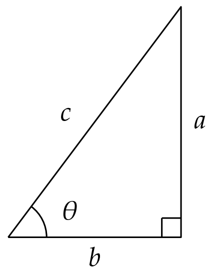
本稿では，高校生が学習する「三角関数の諸公式」に対して，式変形をせずに等式であることがわかる「図による証明」を与える[(1)][(2)]。

本稿に掲載した証明図において，各線分の長さを求めるには，（鋭角 $\boldsymbol{\theta}$ に対する）以下の「三角比の定義」と「三角比の基本関係式」，および「三角形の合同・相似に関する基本的な知識」のみで十分である。

（鋭角 $\boldsymbol{\theta}$ に対する）三角比の定義

右の直角三角形において

- $\sin\theta = \dfrac{a}{c}$
- $\cos\theta = \dfrac{b}{c}$
- $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$
- $\csc\theta = \dfrac{c}{a}\ \left(= \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$
- $\sec\theta = \dfrac{c}{b}\ \left(= \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$
- $\cot\theta = \dfrac{b}{a}\ \left(= \dfrac{1}{\tan\theta}\right)$



この定義から，次の関係式が直ちに導かれる。

（鋭角 $\boldsymbol{\theta}$ に対する）三角比の基本関係式

上の直角三角形において，

- （a と c の関係）　$a = c\sin\theta$,　$c = a\csc\theta\ \left(= \dfrac{a}{\sin\theta}\right)$
- （b と c の関係）　$b = c\cos\theta$,　$c = b\sec\theta\ \left(= \dfrac{b}{\cos\theta}\right)$
- （a と b の関係）　$a = b\tan\theta$,　$b = a\cot\theta\ \left(= \dfrac{c}{\tan\theta}\right)$

---

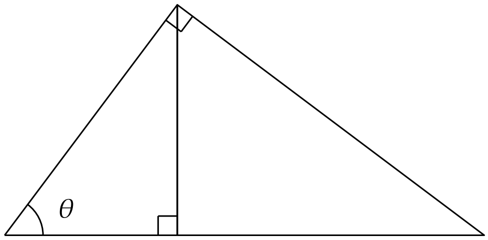
(1) ただし，θ，α，β などの角の大きさには制限がつく。

(2) 一般的に，三角関数の相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ は「三平方の定理」から導出する。また，その他の諸公式は，加法定理の $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ のみ図を用いて証明するものの，それ以外は文字の置換や，既出の公式を利用する式変形によって導出する。（しかも，例えば数研出版の教科書では，その $\cos(\alpha+\beta)$ の導出にさえも「式変形を要する証明」が採用されている。ただし，それは α，β が一般角の場合にも成り立つ証明なので，教科書が「わかりやすさ」より「厳密さ」を必要とするものである以上は，角度に制限がつく証明を採用しないのももっともなことではある。）

§ 1 :　相互関係

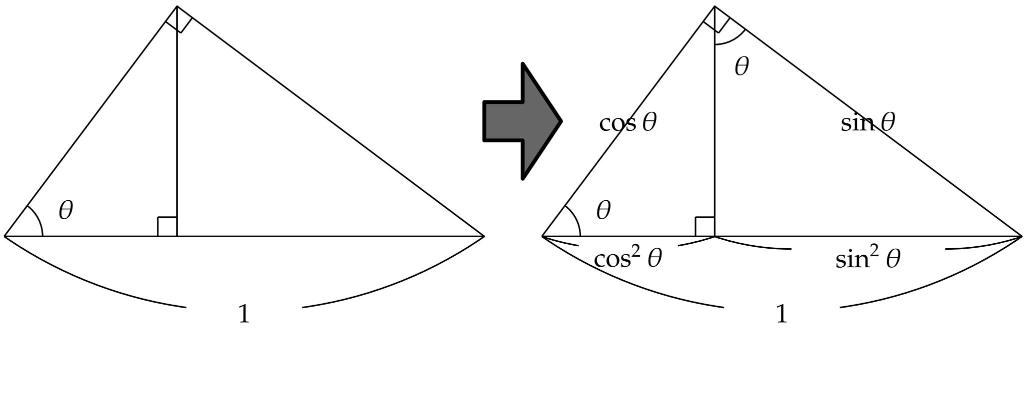
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

相互関係に関しては，次の図形を基本とする。



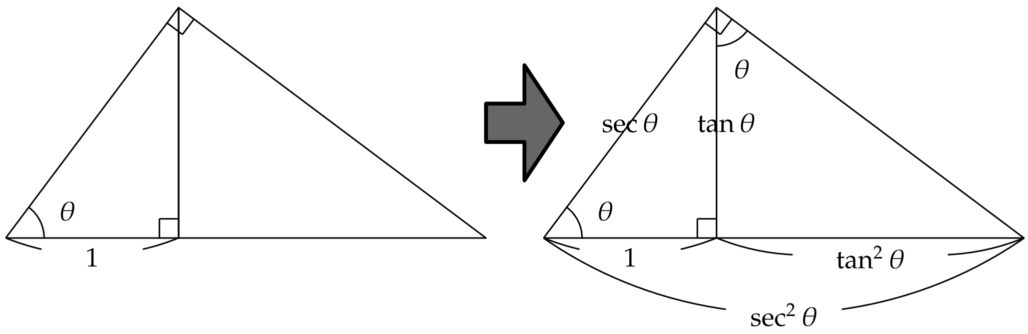
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

θ が鋭角の場合の，図による証明



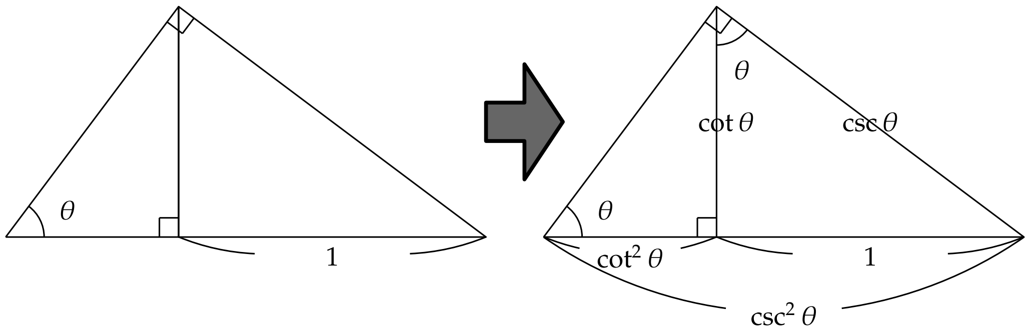
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

θ が鋭角の場合の，図による証明



$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

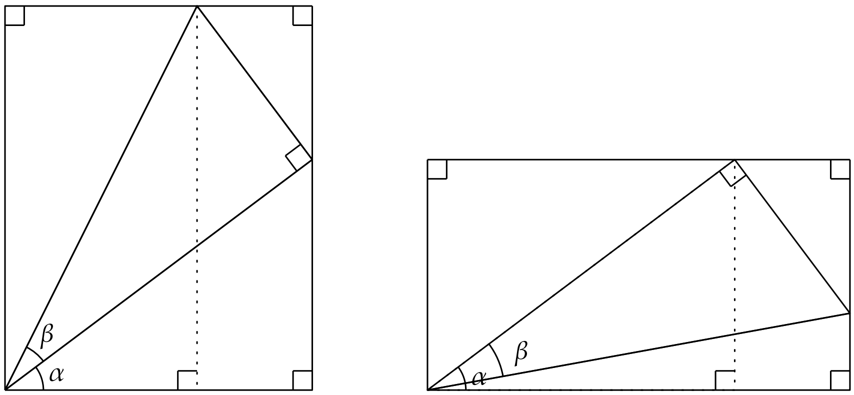
θ が鋭角の場合の，図による証明



§ 2： 加法定理

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

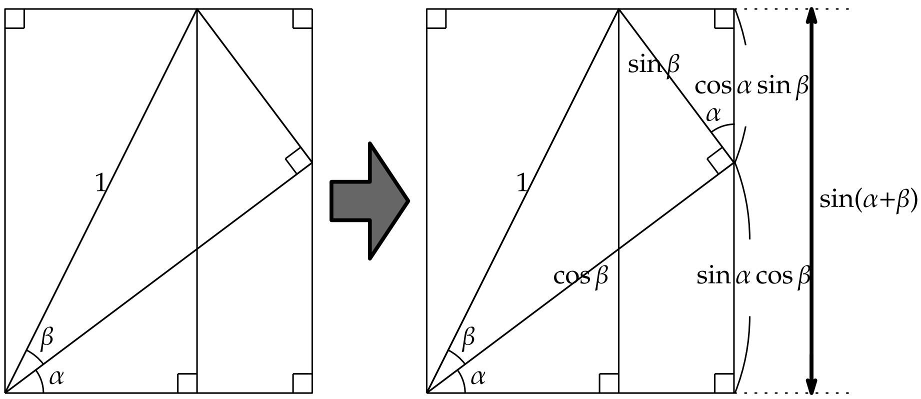
加法定理に関しては，次の図形を基本とする。



左の図は $(\alpha+\beta)$，右の図は $(\alpha-\beta)$ の式を求めるときに使用する。

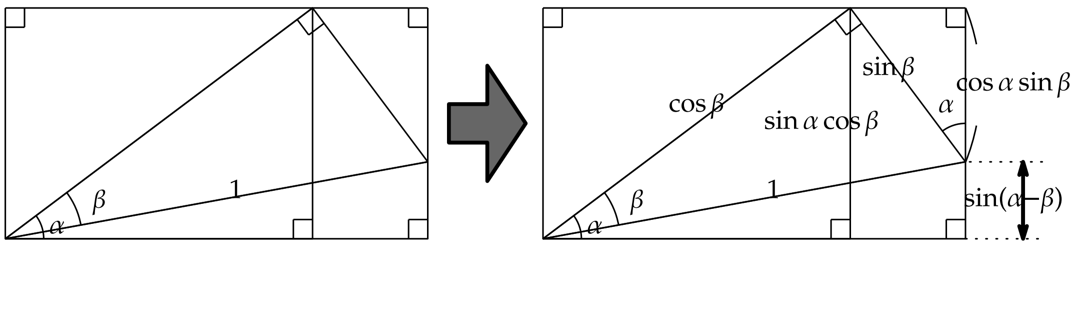
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

α，β，$\alpha+\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



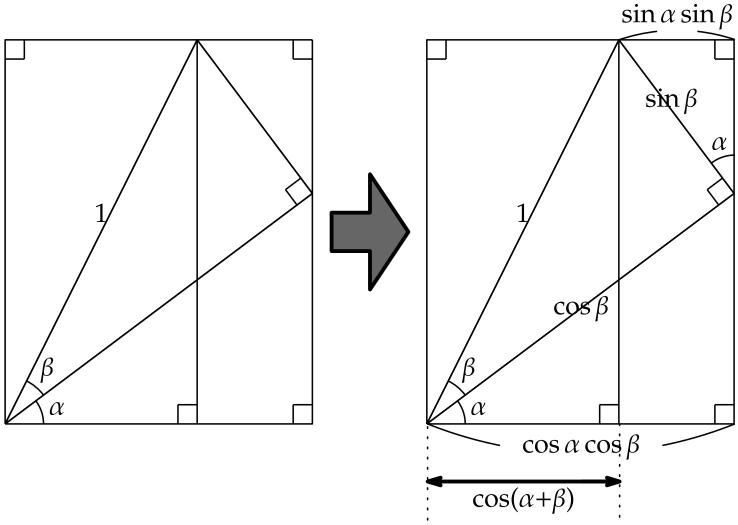
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

α，β，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



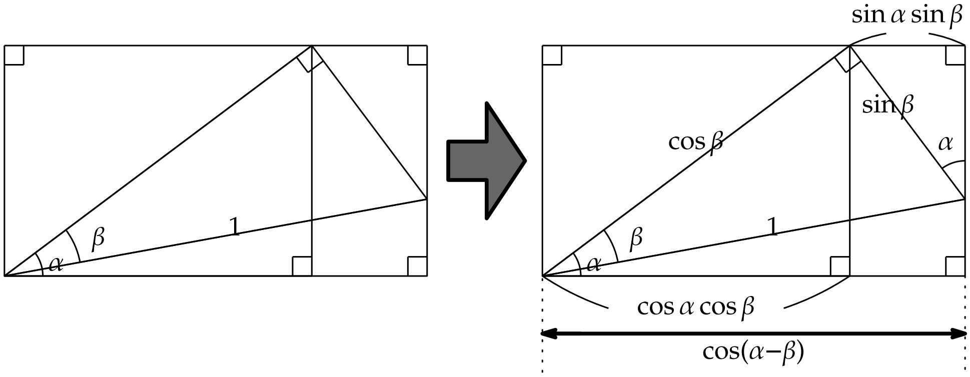
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

α，β，$\alpha+\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



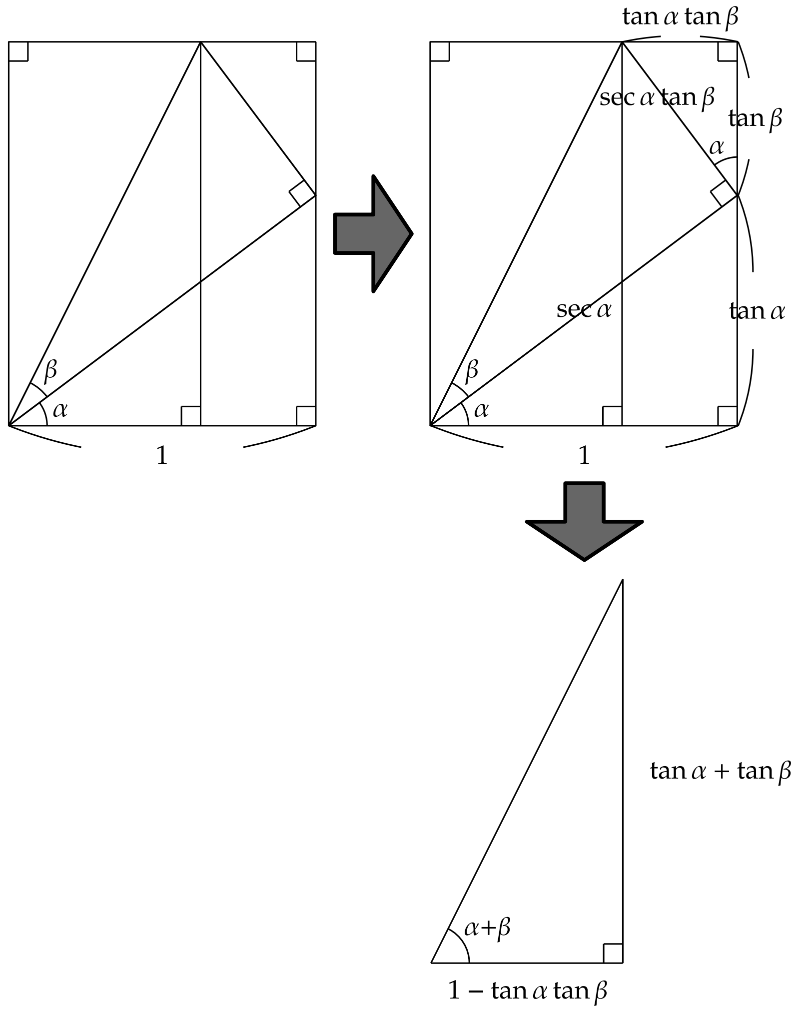
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

α，β，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



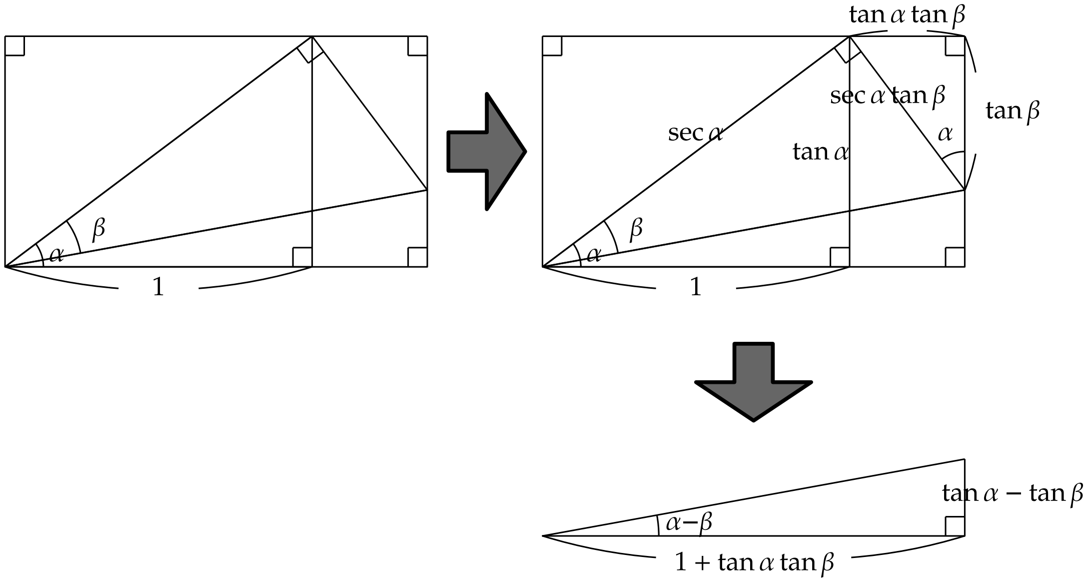
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

α，β，$\alpha+\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

α，β，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明

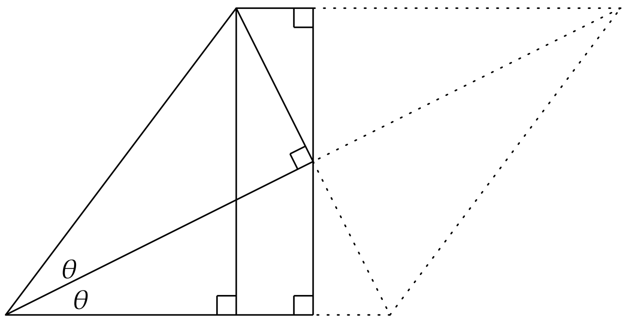


§ 3： 2 倍角の公式

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
- $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
- $t = \tan\theta$ とするとき，

$$\sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2}\,,\quad \cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\quad \tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

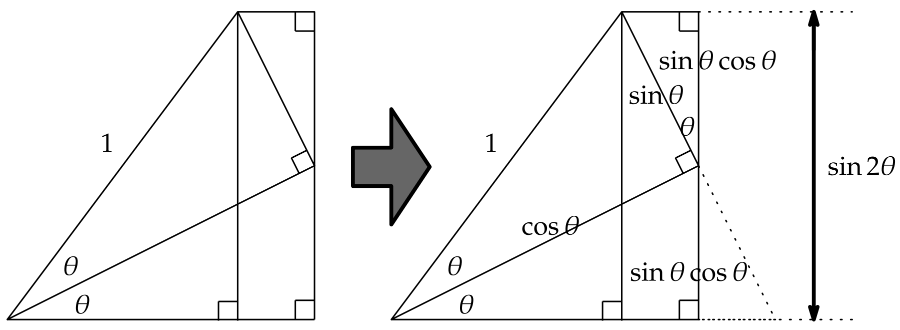
2 倍角の公式に関しては，次の図形を基本とする。



右側の点線部を含めた全体の図形はひし形となることに注意しておく。（点線部は，必要に応じて用いる。）

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

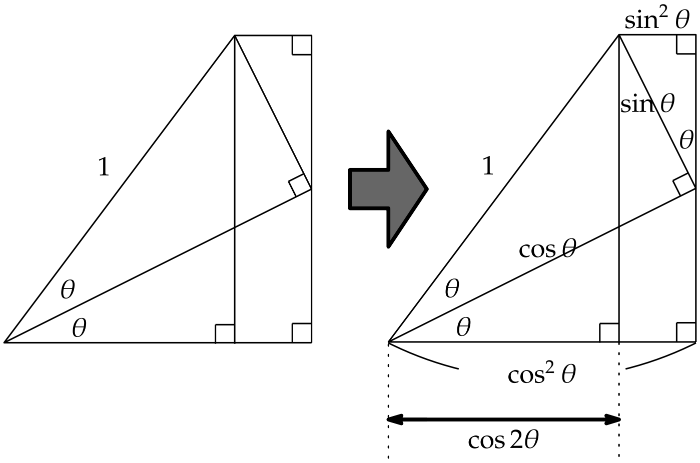
$\boxed{2\theta \text{ が鋭角の場合の，図による証明}}$



2 番目の図において，右側の辺の上下が同じ長さであることは，右下の点線部を補助線として加えることで自明となる。

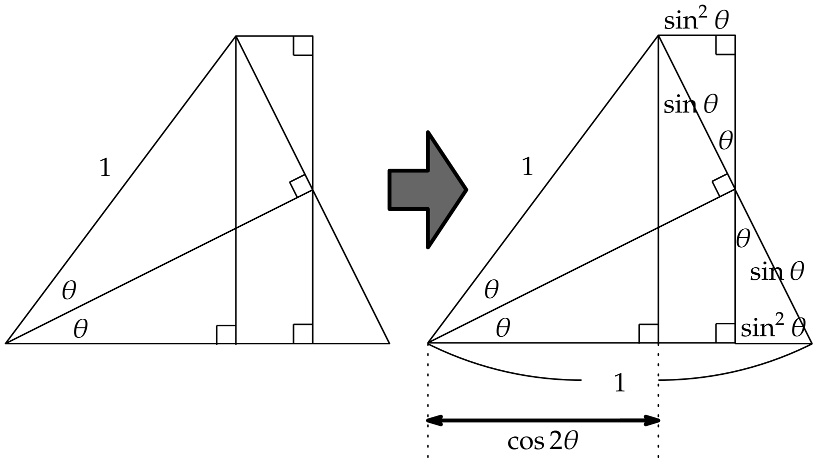
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

2θ が鋭角の場合の，図による証明



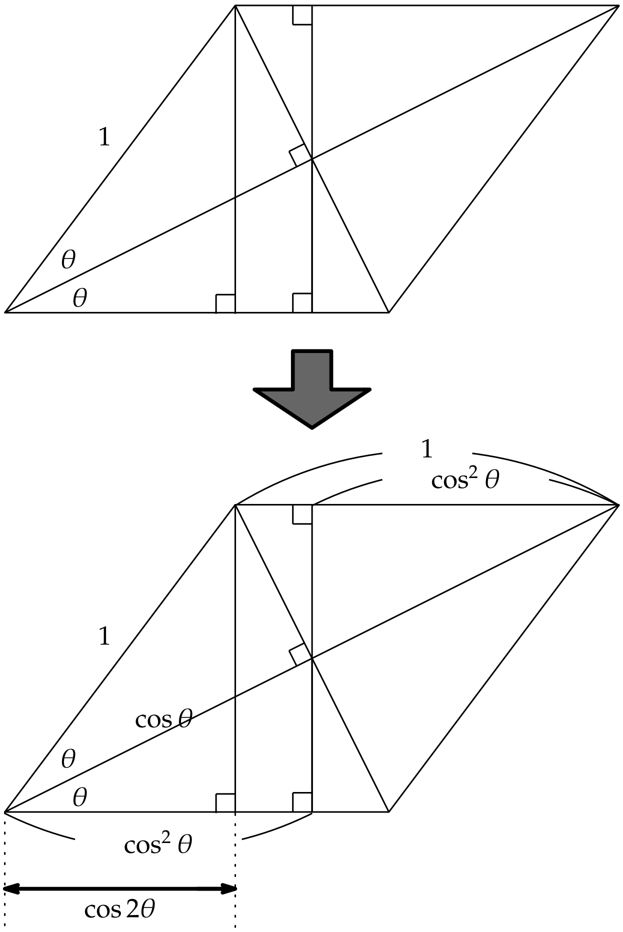
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

2θ が鋭角の場合の，図による証明



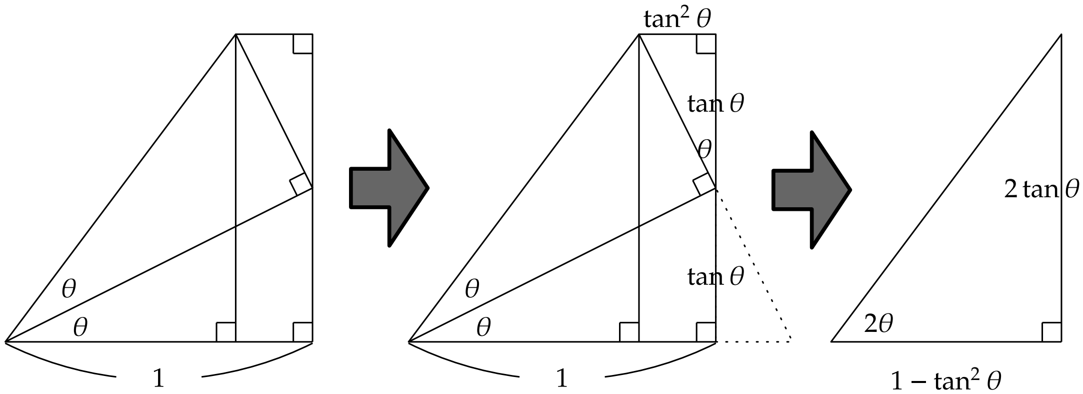
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

2θ が鋭角の場合の，図による証明



$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

2θ が鋭角の場合の，図による証明

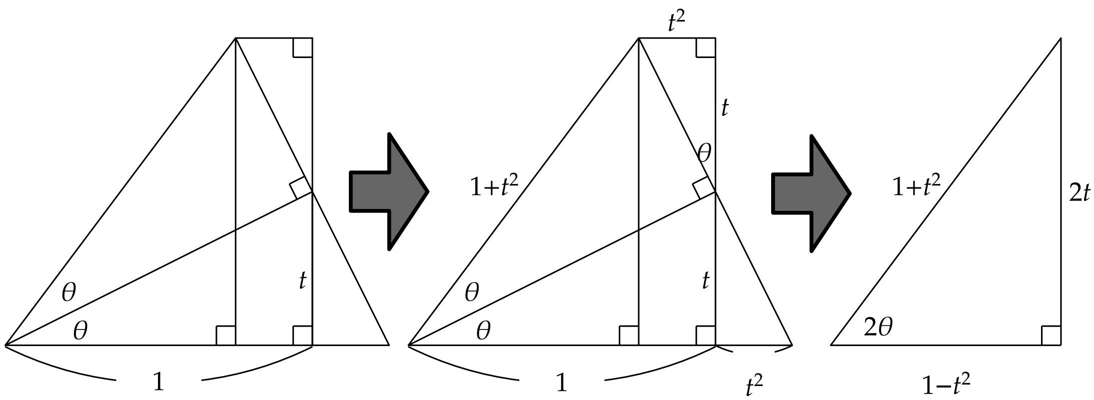


2 番目の図において，右側の辺の上下が同じ長さであることは，右下の点線部を補助線として加えることで自明となる。

$t = \tan\theta$ とするとき，

$$\sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

2θ が鋭角の場合の，図による証明



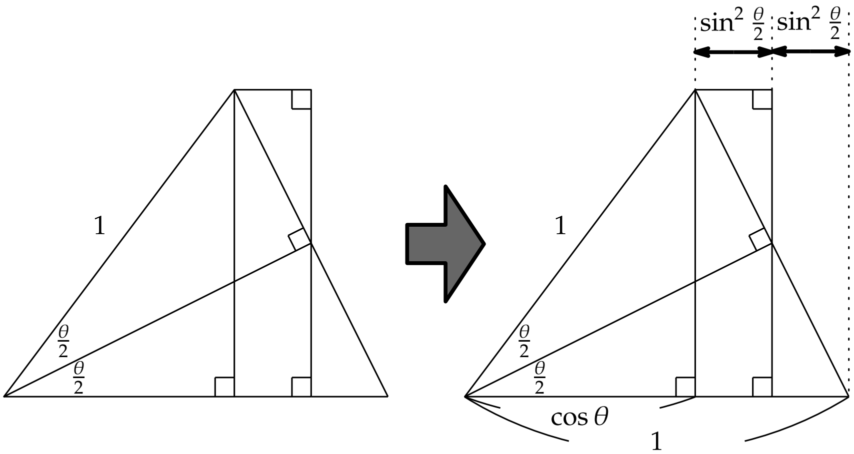
§ 4： 半角の公式

- $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$
- $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$
- $\tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
- $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

半角の公式に関しては，公式ごとにさまざまな図形を用いる。

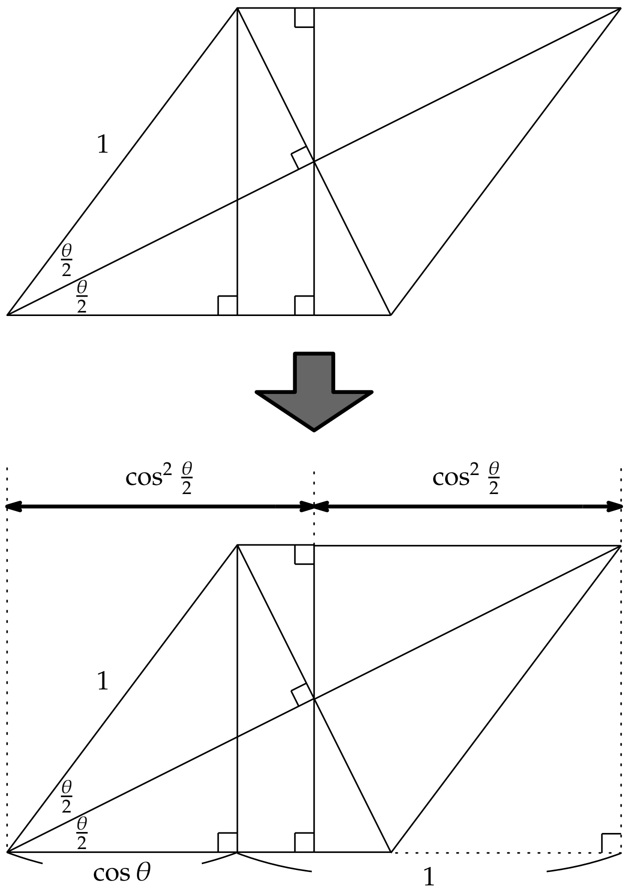
$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

θ が鋭角の場合の，図による証明



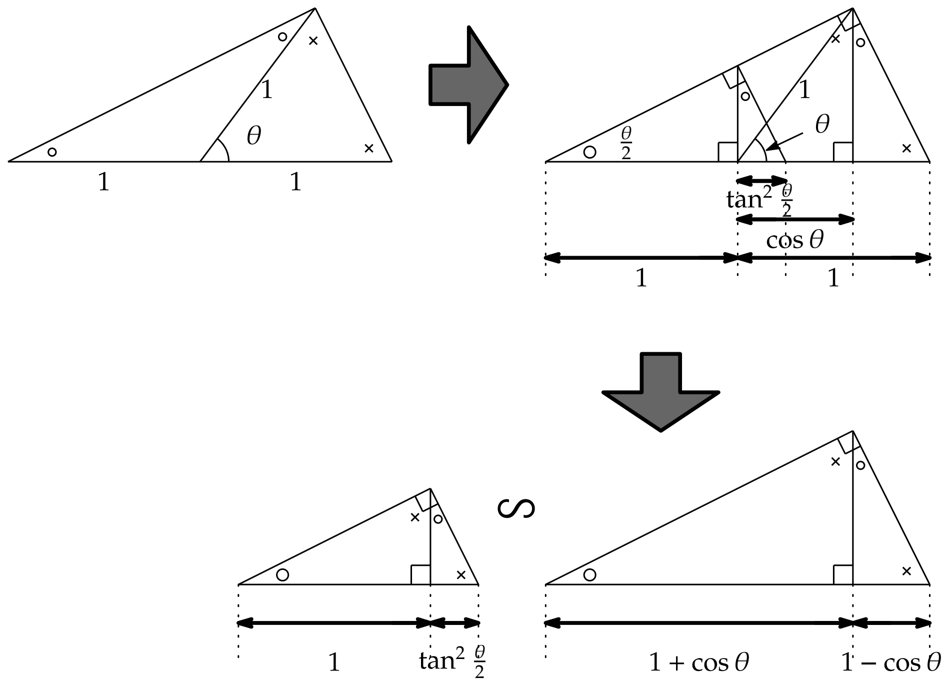
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

θ が鋭角の場合の，図による証明



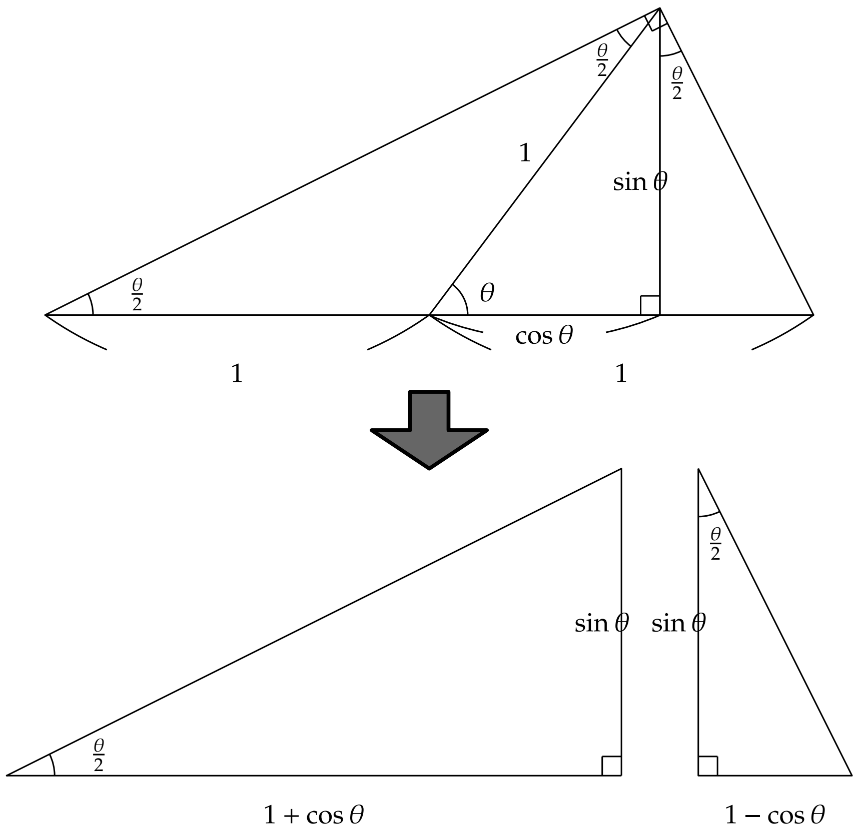
$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

θ が鋭角の場合の，図による証明



$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

θ が鋭角の場合の，図による証明



§ 5：　積和・和積の公式

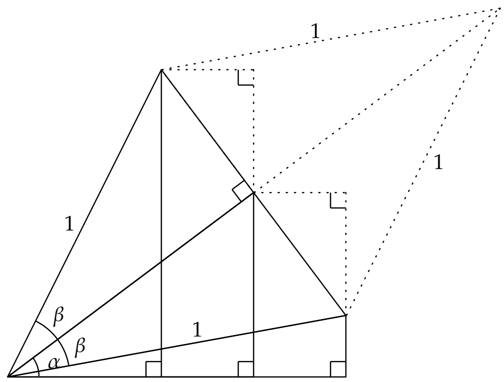
積和の公式

- $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$
- $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right\}$
- $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$
- $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$

和積の公式

- $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

積和の公式に関しては，次の図形を基本とする。

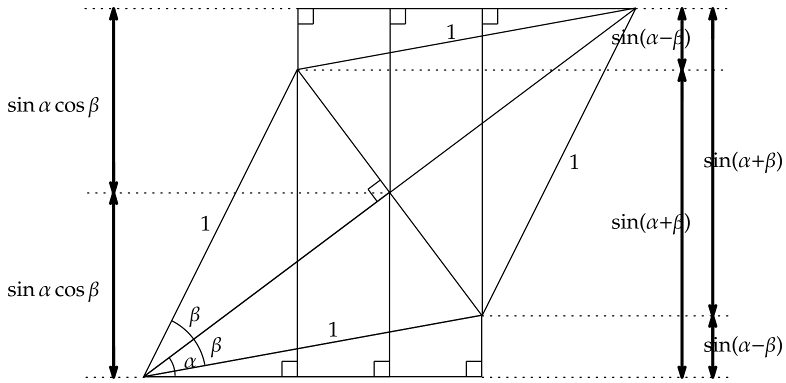


この図は，加法定理の 2 種類の基本図形を組み合わせたものである。（点線部は，それぞれ必要に応じて用いる。）

また，和積の公式の証明の図はすべて，積和の公式の証明の図を $\alpha+\beta = A$，$\alpha-\beta = B$ とそれぞれ置き換えたものである。このとき，$\alpha = \dfrac{A+B}{2}$，$\beta = \dfrac{A-B}{2}$ となっていることに注意しておく。

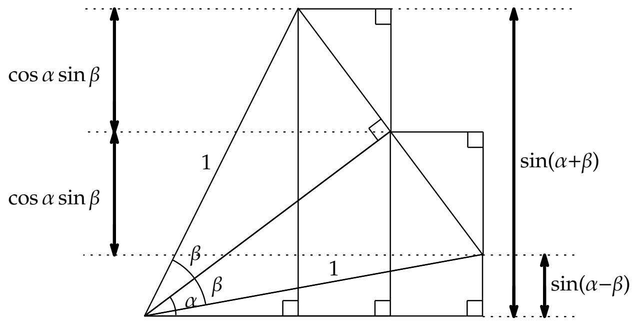
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



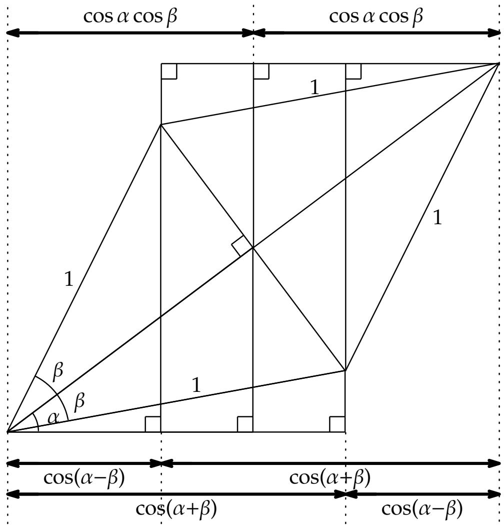
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



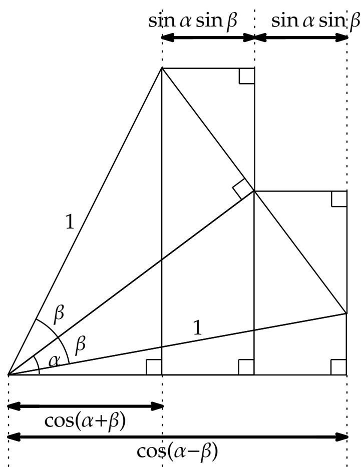
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



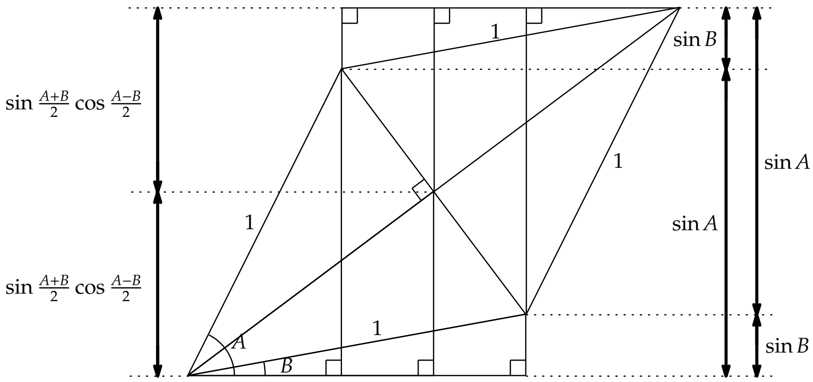
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



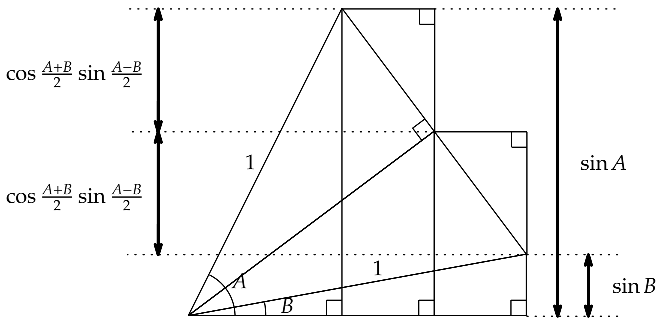
$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

A，B，$\dfrac{A+B}{2}$，$\dfrac{A-B}{2}$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



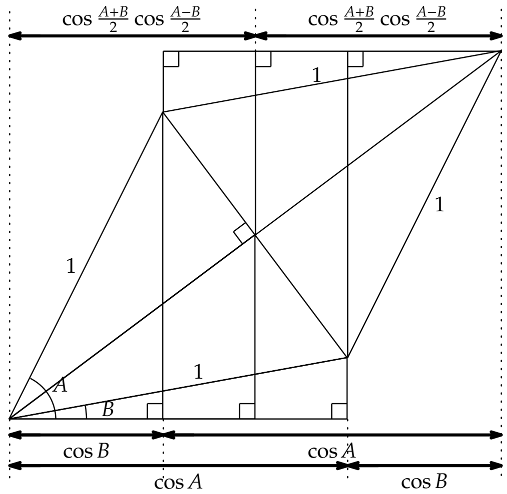
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

A，B，$\dfrac{A+B}{2}$，$\dfrac{A-B}{2}$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



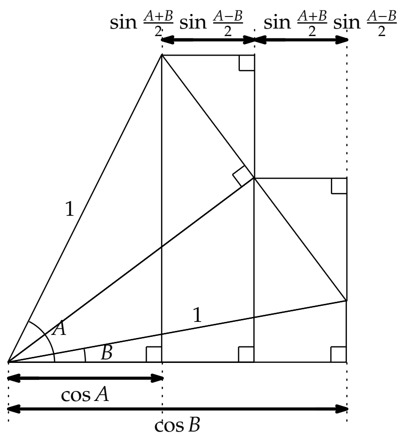
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

A，B，$\frac{A+B}{2}$，$\frac{A-B}{2}$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

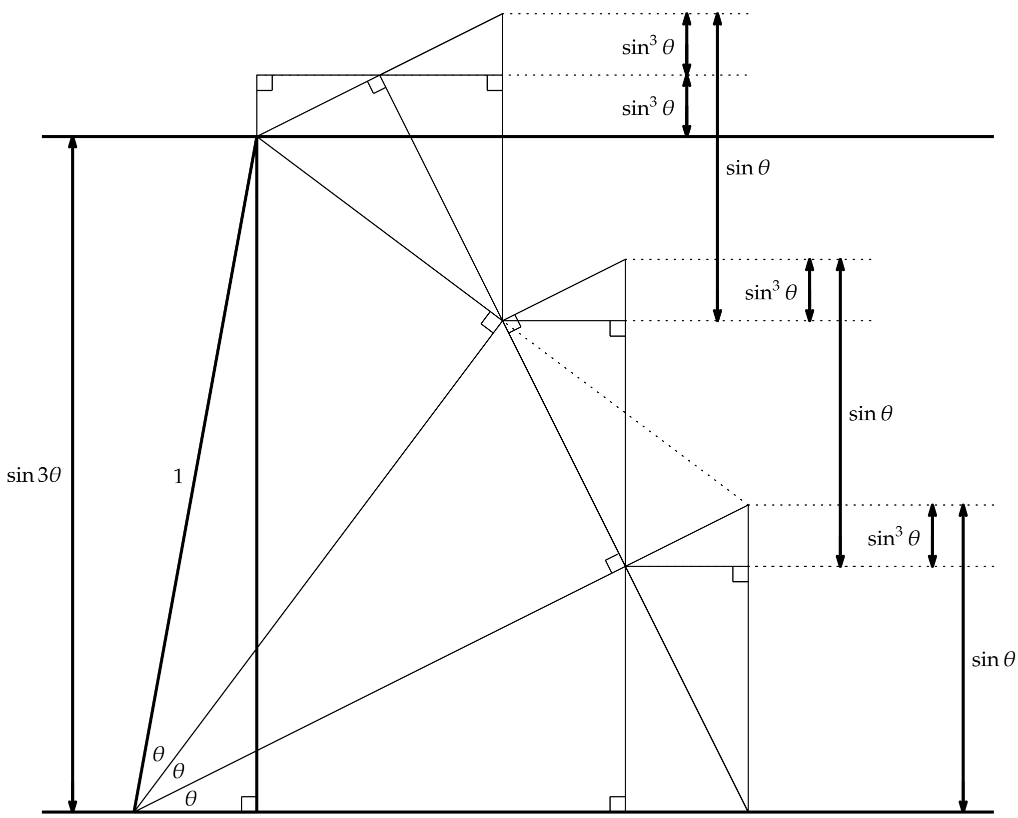
A，B，$\frac{A+B}{2}$，$\frac{A-B}{2}$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



§ 6： 3 倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

3θ が鋭角の場合の，図による証明



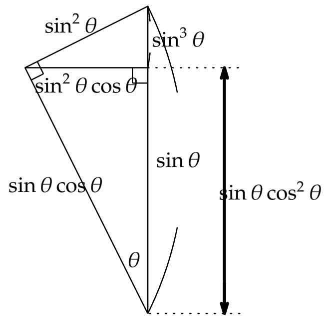
（補足）　右の図の通り，

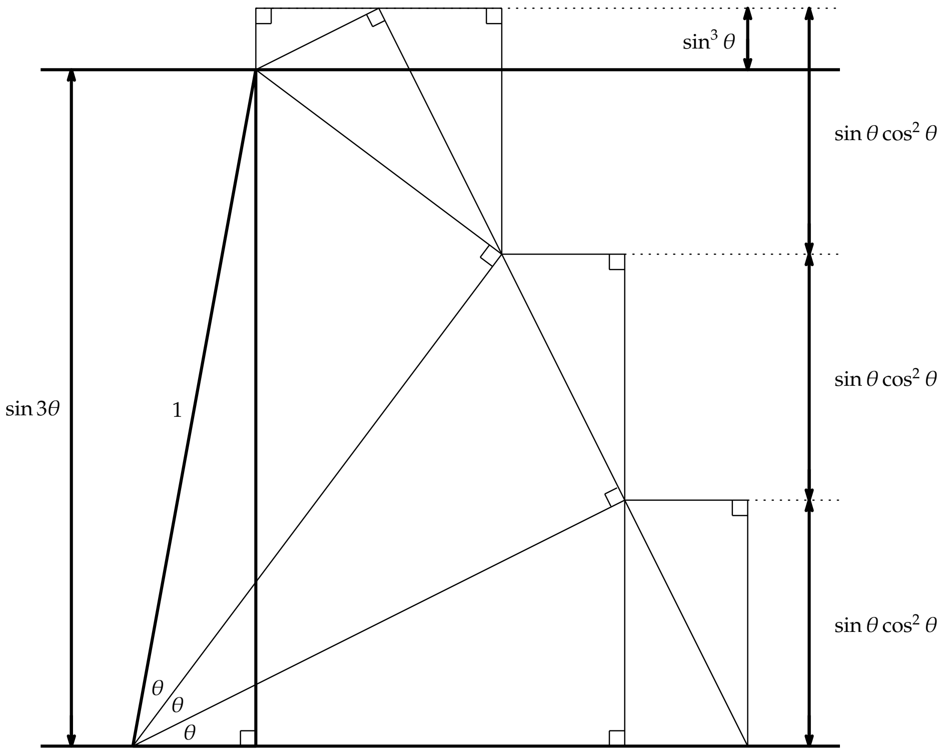
$$\sin\theta - \sin^3\theta = \sin\theta\cos^2\theta$$

であるから，

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

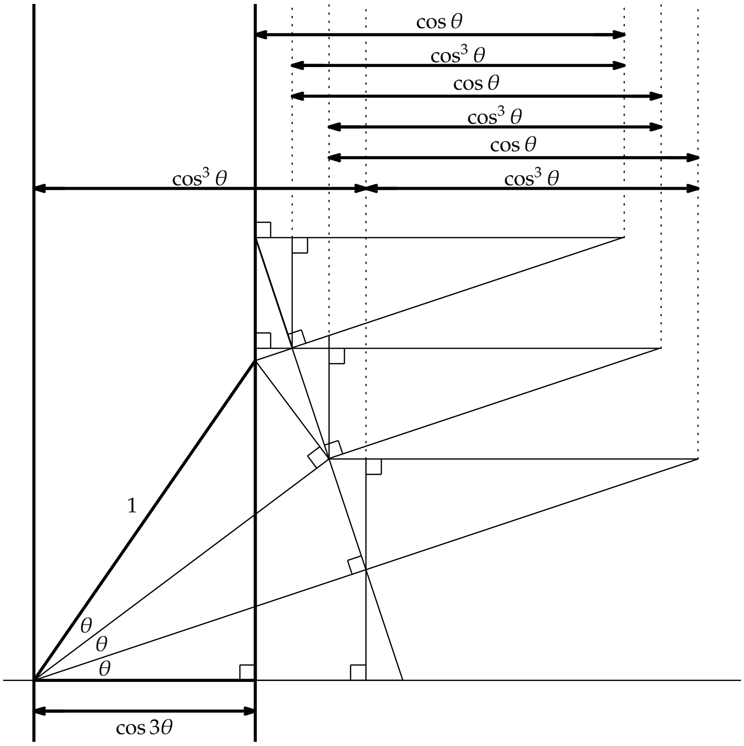
という等式の方が本質的であると言えよう。





$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

3θ が鋭角の場合の，図による証明



（補足）　右の図の通り，

$$\cos\theta - \cos^3\theta = \sin^2\theta\cos\theta$$

であるから，

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$

または

$$\cos 3\theta = \cos\theta - 4\sin^2\theta\cos\theta$$

という等式の方が本質的であると言えよう。