

$$\text{定積分} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (x-\beta)^n dx$$

以下の定積分の公式は、いずれも α と β の大小関係によらない。(すなわち、 $\alpha < \beta$ である必要はない。)

§ 1 一般公式

自然数 m, n に対して、定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (x-\beta)^n dx$ に関しては、次の公式が広く知られている。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (x-\beta)^n dx = (-1)^n \cdot \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \cdot (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

これを憶えやすくしたものが、次の式である。

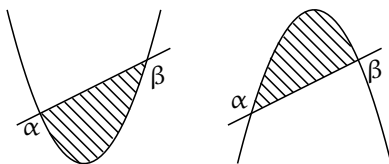
$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (x-\beta)^n dx = \frac{(-1)^n}{m+nC_n} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{m+n} dx$$

§ 2 $m+n=2$ のとき

$$[\text{公式 2-1}] \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{-1}{2C_1} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 dx \quad \left[= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \right]$$

[公式 2-1] は、大学受験業界ではしばしば「**6 分の 1 公式**」などと呼ばれる。

[公式 2-1] を利用できるシチュエーションの例



§3 $m+n=3$ のとき

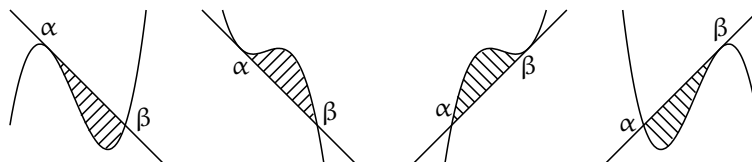
$$[\text{公式 3-1}] \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta) dx = \frac{-1}{3C_1} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^3 dx \quad \left[= -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \right]$$

$$[\text{公式 3-2}] \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)^2 dx = \frac{+1}{3C_2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^3 dx \quad \left[= +\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \right]$$

[公式 3-1], [公式 3-2] は, 大学受験業界ではしばしば「**12 分の 1 公式**」などと呼ばれる。

[公式 3-1] と [公式 3-2] は, α と β を入れ替えただけなので, どちらか一方だけ覚えておけば十分なのだが, むしろ両方まとめて覚えようとした方が覚えやすいと思われる。

[公式 3-1], [公式 3-2] を利用できるシチュエーションの例



問題

曲線 $y = x^3$ と, この曲線上の点 $(1, 1)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。