定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx$

自然数 m, n に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx$ に関しては，次の公式が広く知られている。

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx = (-1)^n \cdot \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \cdot (\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

これを憶えやすくしたものが，次の式である。

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx = \frac{(-1)^n}{{}_{m+n}C_n} \cdot \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx}$$

§1　具体例

以下の定積分の公式は，いずれも α と β の大小関係によらない。（すなわち，$\alpha < \beta$ である必要はない。）

$m+n=2$ のとき

[公式 2–1] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_2C_1} \cdot \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx \quad \left[= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right]$ **頻出**

[公式 2–1] は，大学受験業界ではしばしば「**6 分の 1 公式**」などと呼ばれる。

$m+n=3$ のとき

[公式 3–1] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_3C_1} \cdot \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3\,dx \quad \left[= -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\right]$ **頻出**

[公式 3–2] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx = \frac{+1}{{}_3C_2} \cdot \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3\,dx \quad \left[= +\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\right]$ **頻出**

[公式 3–1]，[公式 3–2] は，大学受験業界ではしばしば「**12 分の 1 公式**」などと呼ばれる。

[公式 3–1] と [公式 3–2] は，α と β を入れ替えただけなので，どちらか一方だけ覚えておけば十分なのだが，むしろ両方まとめて覚えようとした方が覚えやすいと思われる。

$m+n=4$ のとき

[公式 4–1] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_4C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4\,dx \quad \left[= -\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^5\right]$

[公式 4–2] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx = \frac{+1}{{}_4C_2}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4\,dx \quad \left[= +\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5\right]$ **頻出**

[公式 4–3] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^3\,dx = \frac{-1}{{}_4C_3}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4\,dx \quad \left[= -\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^5\right]$

大学入試の対策としてはここまで（すなわち $m+n=4$ のときまで）を習得しておけば十分であるが，法則を正しく把握して憶えやすくするために，$m+n=5$ のときと $m+n=6$ のときも記載しておく。

$m+n=5$ のとき

[公式 5–1] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_5C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx \quad \left[= -\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^6\right]$

[公式 5–2] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3(x-\beta)^2\,dx = \frac{+1}{{}_5C_2}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx \quad \left[= +\frac{1}{60}(\beta-\alpha)^6\right]$

[公式 5–3] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^3\,dx = \frac{-1}{{}_5C_3}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx \quad \left[= -\frac{1}{60}(\beta-\alpha)^6\right]$

[公式 5–4] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^4\,dx = \frac{+1}{{}_5C_4}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx \quad \left[= +\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^6\right]$

$m+n=6$ のとき

[公式 6–1] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_6C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= -\frac{1}{42}(\beta-\alpha)^7\right]$

[公式 6–2] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4(x-\beta)^2\,dx = \frac{+1}{{}_6C_2}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= +\frac{1}{105}(\beta-\alpha)^7\right]$

[公式 6–3] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3(x-\beta)^3\,dx = \frac{-1}{{}_6C_3}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= -\frac{1}{140}(\beta-\alpha)^7\right]$

[公式 6–4] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^4\,dx = \frac{+1}{{}_6C_4}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= +\frac{1}{105}(\beta-\alpha)^7\right]$

[公式 6–5] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^5\,dx = \frac{-1}{{}_6C_5}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= -\frac{1}{42}(\beta-\alpha)^7\right]$

$\boxed{\text{例題}}$ （[公式 5–2] に該当）

$$\int_1^3 (x-1)^3(x-3)^2\,dx$$

$\boxed{\text{問題}}$ （[公式 7–4] に該当）

$$\int_1^3 (x-1)^3(x-3)^4\,dx$$

§2　一般化した公式

前節§1の等式を一般化すれば，次のようになる。

この公式もまた，α と β の大小関係によらない（すなわち， $\alpha<\beta$ である必要はない）。さらに，m と n の大小関係にもよらない。

一般化した公式

任意の自然数 m,n に対して，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)^{n}\,dx = \frac{(-1)^{n}}{{}_{m+n}C_{n}}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}\,dx$$

証明　まず，**部分積分** の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)g'(x)\,dx$$

において，$f'(x)=(x-\alpha)^{p}$，$g(x)=(x-\beta)^{q}$（p,q は自然数）とおくと，

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{p}(x-\beta)^{q}\,dx &= \left[\frac{1}{p+1}(x-\alpha)^{p+1}(x-\beta)^{q}\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{q}{p+1}(x-\alpha)^{p+1}(x-\beta)^{q-1}\,dx\\ &= -\frac{q}{p+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{p+1}(x-\beta)^{q-1}\,dx\end{aligned}$$

である。これを **n 回** 繰り返し適用すると，

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)^{n}\,dx\\ &= -\frac{n}{m+1}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}\,dx && \text{※部分積分 1 回目}\\ &= +\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+2}(x-\beta)^{n-2}\,dx && \text{※部分積分 2 回目}\\ &= -\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+3}(x-\beta)^{n-3}\,dx && \text{※部分積分 3 回目}\\ &\quad\vdots\\ &= (-1)^{n}\cdot\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdots\frac{1}{m+n}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}\,dx\cdots\circledast && \text{※部分積分 } n \text{ 回目}\end{aligned}$$

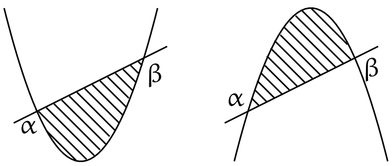
ここで，$\dfrac{n}{m+1}\cdot\dfrac{n-1}{m+2}\cdot\dfrac{n-2}{m+3}\cdots\dfrac{1}{m+n}$ は ${}_{m+n}C_{n}=\dfrac{(m+n)\cdots(m+3)(m+2)(m+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 1}$ の逆数であるから，

$$\circledast = \frac{(-1)^{n}}{{}_{m+n}C_{n}}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}\,dx$$

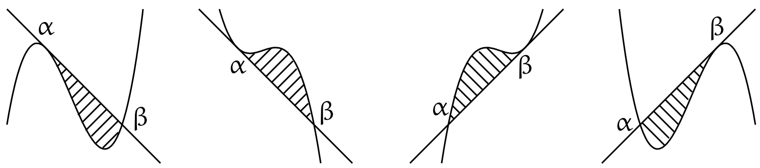
（証明終）

§3　使用例

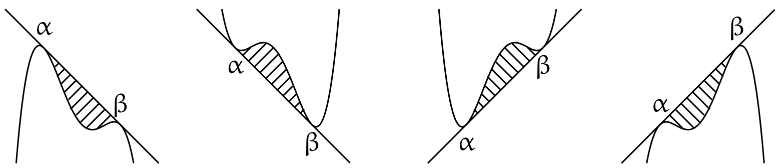
[公式 2–1] を利用できるシチュエーションの例



[公式 3–1]，[公式 3–2] を利用できるシチュエーションの例



[公式 4–2] を利用できるシチュエーションの例



2 学期中間考査　$\boxed{2}$ の (3)

曲線 $y = x^3$ と，この曲線上の点 $(1, 1)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

§4　$n=1$ の場合

一般化した公式の，$n=1$ の場合

任意の自然数 m,n に対して，

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{(m+1)(m+2)}(\beta-\alpha)^{m+2}$$

この公式は，ただ単に前節§2の公式に $n=1$ を代入しただけのものに過ぎないので，既に **部分積分** を用いて証明済みと言える。しかしこの公式は，次のような **部分積分** を用いない導出法もよく知られているので，ここでは改めて，その方法で証明しておく。

部分積分を用いない証明　**頻出**

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dt \text{ (脚注 1)} \\
&= \int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^{m+1}-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^m\right\}dt \\
&= \left[\frac{1}{m+2}(x-\alpha)^{m+2}-\frac{1}{m+1}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^{m+1}\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{m+2}(\beta-\alpha)^{m+2}-\frac{1}{m+1}(\beta-\alpha)^{m+2} \\
&= \left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+1}\right)(\beta-\alpha)^{m+2} \\
&= \frac{(m+1)-(m+2)}{(m+1)(m+2)}(\beta-\alpha)^{m+2} \\
&= \frac{-1}{(m+1)(m+2)}(\beta-\alpha)^{m+2}
\end{aligned}$$

（証明終）

(脚注 1) この式変形は不自然に見えるかもしれないが，ここは，
「$x-\alpha=t$ と置換すると，($x=t+\alpha$ であるから，)
$(x-\alpha)^m(x-\beta)=t^m\left\{(t+\alpha)-\beta\right\}=t^m\left\{t-(\beta-\alpha)\right\}$」
という式変形をしているのと同じことである。