定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$ とベータ関数 $B(p,q)$

参拾萬数学工房

はじめに

本稿は，次の 3 つの節に分かれている。それぞれの節は内容的には独立しているものの，前の節で触れたことに言及する場面もあるので，前から順に読む必要がある。

§1　定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$ の計算方法
§2　ベータ関数 $B(p,q)$
§3　$y=(x-\alpha)^m(x-\beta)^n$ のグラフと x 軸とで囲まれた面積

§1 は，大学受験で必要となる計算という観点で論を進める。大学受験で特に頻繁に顔を出す計算に関しては **頻出** というマークを付した。

§2 は，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$ とベータ関数 $B(p,q)$ との関係を論じる。ベータ関数 $B(p,q)$ との比較をするのであれば，定積分は

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$$

の形ではなく

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

の形で考える方が適していることは，百も承知である。しかし，大学受験で必要となる計算という意味では前者の形の方が使い勝手が良いので，本稿ではその観点を優先し，前者を採用した。

§3 は，いわばオマケのようなものであるが，§1 と §2 を読んだあとであれば，新しい気付きがあるだろうということで追記した。また，§1 と同様に，大学受験で特に頻繁に顔を出す計算に関しては **頻出** というマークを付した。

§1　定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx$ の計算方法

定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx$（ただし $m, n \in \mathbb{N}$）の公式は，大学受験用参考書などでは

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx \;=\; (-1)^n \cdot \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \cdot (\beta-\alpha)^{m+n+1} \tag{1}$$

と紹介されるのが一般的である。しかし，本稿では敢えて

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx \;=\; \frac{(-1)^n}{{}_{m+n}C_n} \cdot \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx} \tag{2}$$

という形を提案したい。右辺に定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx$ が残ったままの形だが，この定積分は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx &= \frac{1}{m+n+1} \cdot \Big[(x-\alpha)^{m+n+1}\Big]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{m+n+1} \cdot (\beta-\alpha)^{m+n+1}\end{aligned}$$

と瞬時に計算できるのだから，この公式の証明 [脚注 1] の覚えやすさ（すなわち，導出方法の思い出しやすさ）を考慮すればこの形で覚えておく方がずっと有益であろうと，私はそう思っている。

また，公式を丸暗記せずとも，置換積分を愚直に繰り返すことによって具体的な定積分の値は算出できる。なので本稿では，上記の公式を求める抽象的な議論をする前に，まずは具体例にて，計算の過程を確認する。

(脚注 1) 証明は § 1.2 で行う。

§ 1.1　具体例 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^7(x-\beta)^3\,dx$

まずは一つの例として，公式を暗記していない前提で，$m=7$，$n=3$ の場合の定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^7(x-\beta)^3\,dx$ を実際に計算してみよう。具体的には，置換積分を 3 回繰り返す。

$$
\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^7(x-\beta)^3\,dx \\
&= \frac{1}{8}\Big[(x-\alpha)^8(x-\beta)^3\Big]_\alpha^\beta - \frac{3}{8}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^8(x-\beta)^2\,dx \\
&= \frac{1}{8}\Big[(x-\alpha)^8(x-\beta)^3\Big]_\alpha^\beta - \left(\frac{3}{9\cdot 8}\Big[(x-\alpha)^9(x-\beta)^2\Big]_\alpha^\beta - \frac{3\cdot 2}{9\cdot 8}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^9(x-\beta)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{8}\Big[(x-\alpha)^8(x-\beta)^3\Big]_\alpha^\beta - \left(\frac{3}{9\cdot 8}\Big[(x-\alpha)^9(x-\beta)^2\Big]_\alpha^\beta - \left(\frac{3\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8}\Big[(x-\alpha)^{10}(x-\beta)\Big]_\alpha^\beta\right.\right. \\
&\hspace{16em}\left.\left. - \frac{3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{10}\,dx\right)\right) \cdots ☆
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\Big[(x-\alpha)^8(x-\beta)^3\Big]_\alpha^\beta = 0,\quad \Big[(x-\alpha)^9(x-\beta)^2\Big]_\alpha^\beta = 0,\quad \Big[(x-\alpha)^{10}(x-\beta)\Big]_\alpha^\beta = 0
$$

であるから，☆ より

$$
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^7(x-\beta)^3\,dx = (-1)^3\cdot\frac{3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{10}\,dx \tag{3}
$$

という等式が得られる。さらに，分数 $\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}$ は組合せ ${}_{10}C_3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}$ の逆数であるから，第 (3) 式は次のように書き換えることができる。

$$
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^7(x-\beta)^3\,dx = \frac{(-1)^3}{{}_{10}C_3}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{10}\,dx \tag{4}
$$

なお，第 (3) 式の右辺の係数 $(-1)^3\cdot\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}$ に関しては，部分積分の経緯から

- $(-1)^3$ は，部分積分を 3 回繰り返したことによって現れた
- 分子の $3\cdot 2\cdot 1$ は，$(x-\beta)^3$ を 3 回微分したことによって現れた
- 分母の $10\cdot 9\cdot 8$ は，$(x-\alpha)^7$ を 3 回積分したことによって現れた

ということがわかる。

§ 1.2　一般化した公式

前節 § 1.1 で得た等式 (4) を一般化すれば，次のようになる（脚注 2）；

一般化した公式

任意の $m,n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx = \frac{(-1)^n}{{}_{m+n}C_n} \cdot \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n} \, dx$$

証明　まず，部分積分 の公式

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\, dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\, dx$$

において，$f'(x) = (x-\alpha)^p$，$g(x) = (x-\beta)^q$（$p,q \in \mathbb{N}$）とおくと，

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^p (x-\beta)^q \, dx &= \left[\frac{1}{p+1}(x-\alpha)^{p+1}(x-\beta)^q\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{q}{p+1}(x-\alpha)^{p+1}(x-\beta)^{q-1}\, dx \\ &= -\frac{q}{p+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{p+1}(x-\beta)^{q-1}\, dx\end{aligned}$$

である。これを n 回 繰り返し適用すると，

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx \\ &= -\frac{n}{m+1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}\, dx && \text{※部分積分 1 回目} \\ &= +\frac{n(n-1)}{(m+2)(m+1)}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+2}(x-\beta)^{n-2}\, dx && \text{※部分積分 2 回目} \\ &= -\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+3)(m+2)(m+1)}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+3}(x-\beta)^{n-3}\, dx && \text{※部分積分 3 回目} \\ &\quad\vdots \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{(m+n)\cdots(m+3)(m+2)(m+1)}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\, dx \cdots ★ \\ & && \text{※部分積分 } n \text{ 回目}\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{(m+n)\cdots(m+3)(m+2)(m+1)}$ は ${}_{m+n}C_n = \dfrac{(m+n)\cdots(m+3)(m+2)(m+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 1}$ の逆数であるから，★ より

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx = \frac{(-1)^n}{{}_{m+n}C_n}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\, dx$$

（証明終）

（脚注 2）この公式は，α と β の大小関係によらない。また，m と n の大小関係にもよらない。

§ 1.3　具体例の列記

前節 § 1.2 で証明した公式を，具体的にいくつか列記する。ただし，この公式は計算途中の形であるから，定積分を最後まで計算した結果も並記しておく。

なお，以下の定積分の公式は，いずれも α と β の大小関係によらない。（すなわち，$\alpha < \beta$ である必要はない。）

$m+n=2$ のとき

[公式 2–1]　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_2C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx \quad \left[= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right]$　頻出

[公式 2–1] は，大学受験業界ではしばしば「**6 分の 1 公式**」と呼ばれる。

$m+n=3$ のとき

[公式 3–1]　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_3C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3\,dx \quad \left[= -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\right]$　頻出

[公式 3–2]　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx = \frac{+1}{{}_3C_2}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3\,dx \quad \left[= +\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\right]$　頻出

$m+n=4$ のとき

[公式 4–1]　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_4C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4\,dx \quad \left[= -\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^5\right]$

[公式 4–2]　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx = \frac{+1}{{}_4C_2}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4\,dx \quad \left[= +\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5\right]$　頻出

[公式 4–3]　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^3\,dx = \frac{-1}{{}_4C_3}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4\,dx \quad \left[= -\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^5\right]$

大学入試の対策としてはここまで（すなわち $m+n=4$ のときまで）で十分だが，せっかくなので，$m+n=5$ のときと $m+n=6$ のときも挙げておく。

$m+n=5$ のとき

[公式 5–1] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_5C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx \quad \left[= -\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^6\right]$

[公式 5–2] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3(x-\beta)^2\,dx = \frac{+1}{{}_5C_2}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx \quad \left[= +\frac{1}{60}(\beta-\alpha)^6\right]$

[公式 5–3] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^3\,dx = \frac{-1}{{}_5C_3}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx \quad \left[= -\frac{1}{60}(\beta-\alpha)^6\right]$

[公式 5–4] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^4\,dx = \frac{+1}{{}_5C_4}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx \quad \left[= +\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^6\right]$

$m+n=6$ のとき

[公式 6–1] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{{}_6C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= -\frac{1}{42}(\beta-\alpha)^7\right]$

[公式 6–2] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4(x-\beta)^2\,dx = \frac{+1}{{}_6C_2}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= +\frac{1}{105}(\beta-\alpha)^7\right]$

[公式 6–3] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3(x-\beta)^3\,dx = \frac{-1}{{}_6C_3}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= -\frac{1}{140}(\beta-\alpha)^7\right]$

[公式 6–4] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^4\,dx = \frac{+1}{{}_6C_4}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= +\frac{1}{105}(\beta-\alpha)^7\right]$

[公式 6–5] $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^5\,dx = \frac{-1}{{}_6C_5}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx \quad \left[= -\frac{1}{42}(\beta-\alpha)^7\right]$

§ 1.4　$n=1$ の場合

一般化した公式の，$n=1$ の場合

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)\,dx = \frac{-1}{(m+1)(m+2)}\cdot(\beta-\alpha)^{m+2}$$

この公式は，ただ単に前節 § 1.2 の公式に $n=1$ を代入しただけのものに過ぎないので，

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)\,dx &= \frac{-1}{{}_{m+1}C_1}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}\,dx \\ &= \frac{-1}{m+1}\cdot\frac{1}{m+2}\Big[(x-\alpha)^{m+2}\Big]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{-1}{(m+1)(m+2)}\cdot(\beta-\alpha)^{m+2}\end{aligned}$$

と求めることもできる。しかし，$x-\beta=(x-\alpha)-(\beta-\alpha)$ という変形 (脚注 3) を用いる方法もよく知られているので，ここでは改めて，その方法でも証明しておこう。

証明（$n=1$ の場合）　**頻 出**

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)\,dx &= \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\left\{(x-\alpha)^{m+1}-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^{m}\right\}\,dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}\,dt-(\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}\,dt \\ &= \frac{1}{m+2}\Big[(x-\alpha)^{m+2}\Big]_{\alpha}^{\beta}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{m+1}\Big[(x-\alpha)^{m+1}\Big]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{m+2}\cdot(\beta-\alpha)^{m+2}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{m+1}\cdot(\beta-\alpha)^{m+1} \\ &= \left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+1}\right)\cdot(\beta-\alpha)^{m+2} \\ &= \frac{(m+1)-(m+2)}{(m+1)(m+2)}\cdot(\beta-\alpha)^{m+2} \\ &= \frac{-1}{(m+1)(m+2)}\cdot(\beta-\alpha)^{m+2}\end{aligned}$$

（証明終）

(脚注 3)　この変形は不自然に見えるかもしれないが，しかし実際には「この定積分を x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動して考える」というだけのことに過ぎない。

§2　ベータ関数 $B(p,q)$

ベータ関数 $B(p,q)$ の定義は，次の通りである。

ベータ関数 $B(p,q)$ の定義

実部が正である複素数 p,q に対して，

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

§2.1　ベータ関数の値の意味

言うまでもないが，p,q を実数に限定した場合，ベータ関数 $B(p,q)$ の値は，被積分関数

$$y = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

のグラフと x 軸とで囲まれた図形の面積を表している。

ところで，p が非整数のとき，実関数として x^{p-1} が定義できるのは $x \geqq 0$ に限られる。また，q が非整数のとき，実関数として $(1-x)^{q-1}$ が定義できるのは $x \leqq 1$ に限られる。よって，p,q が共に非整数のとき，被積分関数 $y = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ の実関数としての定義域は

$$0 \leqq x \leqq 1$$

である。一つだけ例を挙げると，次の図 1 は，$p = 4.5$，$q = 2.5$ の場合の，

$$y = x^{3.5}(1-x)^{1.5}$$

のグラフと x 軸とで囲まれた図形である。

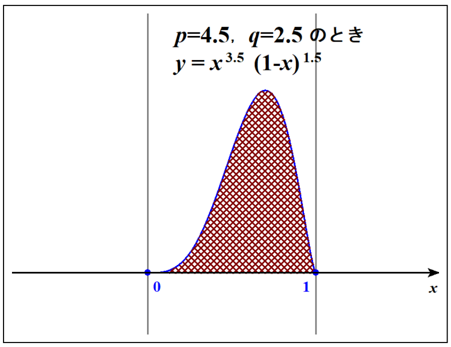


図 1　p,q が非整数の場合の例

もちろん，本稿の主題である定積分とベータ関数 $B(p,q)$ との比較においては，p,q が 1 以上の整数である場合のみを考えれば十分である。その場合，被積分関数 $y=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ の実関数としての定義域は実数全体である。

被積分関数 $y=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ のグラフの $x<0$ および $x>1$ における挙動は，p,q の偶奇によって変わる。（→図 2 ～ 図 5）

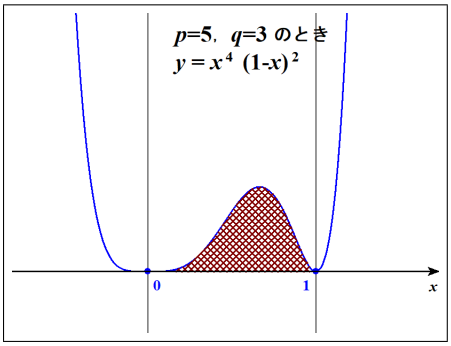


図 2　p,q が共に奇数の場合の例

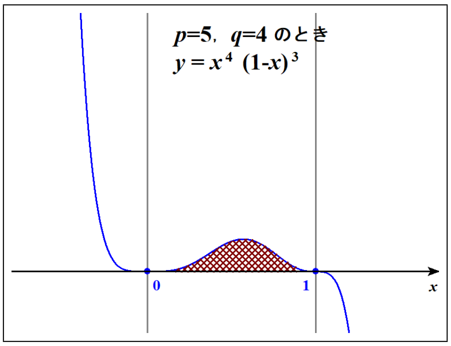


図 3　p が奇数，q が偶数の場合の例

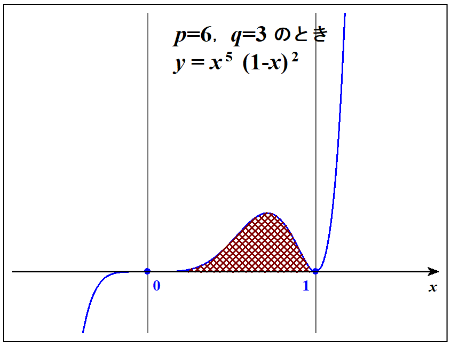


図 4　p が偶数，q が奇数の場合の例

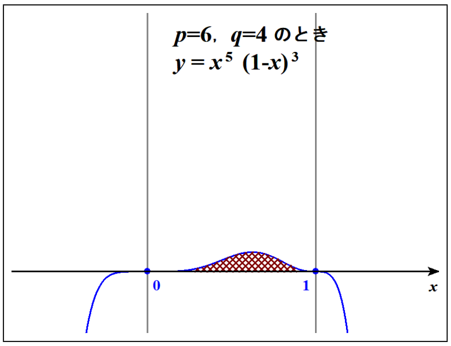


図 5　p,q が共に偶数の場合の例

もっとも，$B(p,q)$ の考察に際しては $0 \leqq x \leqq 1$ にのみ注目すれば十分なので，以下では p,q の偶奇に関していちいち言及しないこととする。

＊　＊　＊

ここで，ベータ関数 $B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ の **p,q が 1 以上の整数の場合**に，§1 にて導入した公式 (2)

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx = \frac{(-1)^n}{{}_{m+n}C_n} \cdot \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx}$$

を適用するとどうなるか見ていく。

まず，$(1-x)^{q-1} = (-(x-1))^{q-1} = (-1)^{q-1} \cdot (x-1)^{q-1}$ である。

また，公式 (2) に $\alpha = 0$，$\beta = 1$，$m = p-1$，$n = q-1$ を代入すると

$$\int_0^1 x^{p-1}(x-1)^{q-1}\,dx \;=\; \frac{(-1)^{q-1}}{{}_{p+q-2}C_{q-1}} \cdot \int_0^1 x^{p+q-2}\,dx$$

である。

以上より，

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \\ &= (-1)^{q-1} \cdot \int_0^1 x^{p-1}(x-1)^{q-1}\,dx \\ &= (-1)^{q-1} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{{}_{p+q-2}C_{q-1}} \cdot \int_0^1 x^{p+q-2}\,dx \\ &= \frac{1}{{}_{p+q-2}C_{q-1}} \cdot \int_0^1 x^{p+q-2}\,dx \end{aligned}$$

という結果が得られる (脚注 4)。

さて，この結果の意味を掘り下げる。具体例の方がわかりやすいので，$p = 5$，$q = 4$ の場合で考察する。

$$B(5,4) = \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx = \frac{1}{{}_7C_3} \cdot \int_0^1 x^7\,dx$$

右辺の積分 $\displaystyle\int_0^1 x^7\,dx$ は，関数 $y = x^7$ のグラフと，2 直線 $y = 0$，$x = 1$ とで囲まれた部分の面積を表す。つまり，「関数 $y = x^4(1-x)^3$ と x 軸で囲まれた部分の面積」は，「関数 $y = x^7$ のグラフと 2 直線 $y = 0$，$x = 1$ とで囲まれた部分の面積」の $\dfrac{1}{{}_7C_3}$ 倍だということである (脚注 5)。(→図 6)

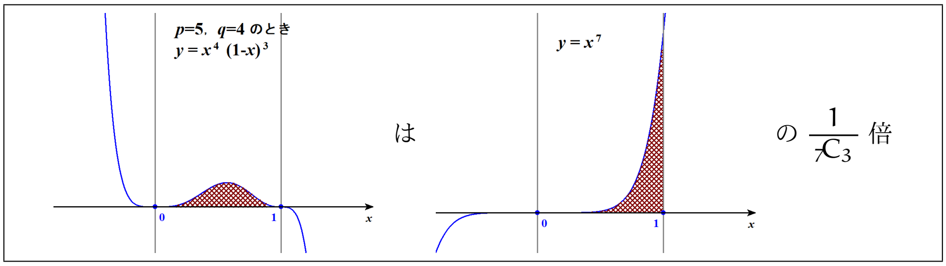


図 6　$p = 5$，$q = 4$ の場合

(脚注 4)　さらに $\displaystyle\int_0^1 x^{p+q-2}\,dx = \frac{1}{p+q-1}$ まで計算すれば $B(p,q) = \dfrac{(p-1)! \cdot (q-1)!}{(p+q-1)!}$ となり，これが広く知られている結果である。

(脚注 5)　さらに計算すれば，$B(5,4) = \dfrac{1}{{}_7C_3} \cdot \displaystyle\int_0^1 x^7\,dx = \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{280}$ となる。

§ 2.2　定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx$ とベータ関数 $B(p, q)$ との関係

本節 § 2.2 においては，便宜上，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx$ を $I_{\alpha,\beta}(m, n)$ とおく。すなわち

$$I_{\alpha,\beta}(m, n) := \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx$$

である。この記法は，あくまでも本稿の本節でのみ勝手に創出したものであることに留意されたい。

さて，定積分 $I_{\alpha,\beta}(m, n)$ とベータ関数 $B(p, q)$ の関係と言えば，

[A]　$B(p, q)$ を $I_{\alpha,\beta}(m, n)$ で表す
[B]　$I_{\alpha,\beta}(m, n)$ を $B(p, q)$ で表す

という 2 つの方向があるので，以下ではこれらを別々に考察していく。

[A] $B(p, q)$ を $I_{\alpha,\beta}(m, n)$ で表す

これは簡単で，ベータ関数 $B(p, q)$ の定義から即座に

$$B(p, q) = (-1)^{q-1} \cdot I_{0,1}(p-1, q-1) \tag{5}$$

とわかる。

[B] $I_{\alpha,\beta}(m, n)$ を $B(p, q)$ で表す

まず，(5) 式に $p = m+1$，$q = n+1$ を代入すると，

$$B(m+1, n+1) = (-1)^n \cdot I_{0,1}(m, n) \tag{6}$$

とわかる。

ここで，もし仮に，予め $I_{\alpha,\beta}(m, n)$ の値を

$$I_{\alpha,\beta}(m, n) \;=\; (-1)^n \cdot \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \cdot (\beta-\alpha)^{m+n+1} \tag{7}$$

と求めているのであれば，これに $\alpha = 0$，$\beta = 1$ を代入することによって

$$\begin{aligned} B(m+1, n+1) &= (-1)^n \cdot I_{0,1}(m, n) \\ &= (-1)^n \cdot \left\{ (-1)^n \cdot \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \cdot (1-0)^{m+n+1} \right\} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \end{aligned}$$

と計算することができ，この結果を改めて (7) 式に代入することによって

$$I_{\alpha,\beta}(m,n) = = (-1)^n \cdot B(m+1,n+1) \cdot (\beta-\alpha)^{m+n+1} \tag{8}$$

という関係式が導かれる。この (8) 式こそ，まさにいま求めようとしている関係式である。

しかし，本稿においては $I_{\alpha,\beta}(m,n)$ の値を予め (7) 式のようには求めていないのだから，この導出方法には違和感がある。

そこで，今度は，本稿で採用している

$$I_{\alpha,\beta}(m,n) \ = \ \frac{(-1)^n}{{}_{m+n}C_n} \cdot \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx \tag{9}$$

を用いて (8) 式を導くことを考えてみよう。

＊　＊　＊

まず，(9) 式に $\alpha = 0$，$\beta = 1$ を代入すると

$$I_{0,1}(m,n) = \frac{(-1)^n}{{}_{m+n}C_n} \cdot \int_0^1 x^{m+n}\,dx$$

である。これを (6) 式に代入すると

$$B(m+1,n+1) = \frac{1}{{}_{m+n}C_n} \cdot \int_0^1 x^{m+n}\,dx \tag{10}$$

となることがわかる。

ここで，(9) 式の右辺に現れる定積分と (10) 式の右辺に現れる定積分，すなわち

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx \quad と \quad \int_0^1 x^{m+n}\,dx$$

の値を比較すると，計算するまでもなく前者は後者の $(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ 倍であることがわかる（脚注 6）(→図 7)。すなわち

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx = (\beta-\alpha)^{m+n+1} \cdot \int_0^1 x^{m+n}\,dx \tag{11}$$

である。

（脚注 6） これを「計算するまでもなく」と言えるかどうかは定積分に関する理解の深さに強く依存するが，ここでは任意の自然数 N に対して

- $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^N\,dx$ は「横 $(\beta-\alpha)$，縦 $(\beta-\alpha)^N$ の長方形の面積 $(\beta-\alpha)^{N+1}$ の $\dfrac{1}{N+1}$ 倍」
- $\displaystyle\int_0^1 x^N\,dx$ は「横 1，縦 1 の正方形の面積 1 の $\dfrac{1}{N+1}$ 倍」

であることを既知として論じた。前者は後者の $(\beta-\alpha)^{N+1}$ 倍であり，今回はこれの $N = m+n$ の場合に過ぎない。図 7 を参照。

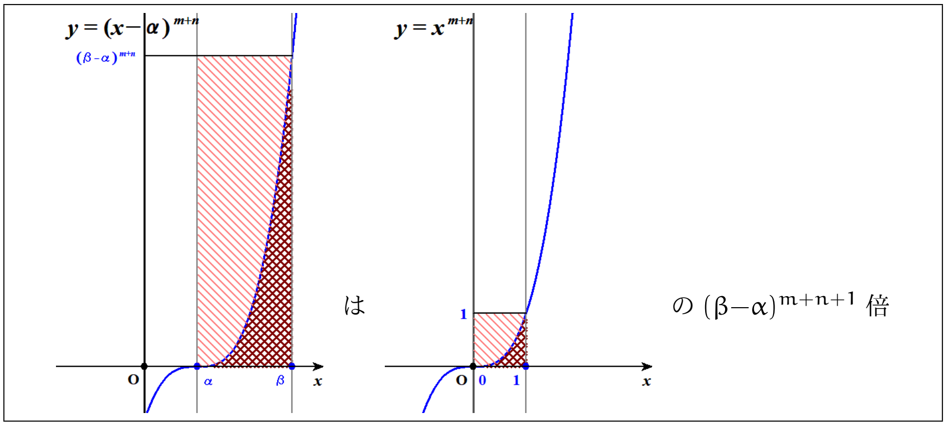


図 7　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}\,dx$ と $\displaystyle\int_{0}^{1}x^{m+n}\,dx$

以上，(9) 式，(10) 式，(11) 式を組み合わせることによって，(8) 式が導出される。しかし，これをただ数式変形だけで済ませてしまうのはあまりに味気ないし，そのような方法ではそもそも理解が深まらない。なので，ページが嵩んでしまうことを厭わず，丁寧に確認したい。

このあとの議論を読みやすく，考えやすくするために，4 つの定積分を，次のように ㋐，㋑，㋒，㋓ と定める。

- $I_{\alpha,\beta}(m,n)$ を，すなわち $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)^{n}\,dx$ を，㋐とする。
- $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}\,dx$ を，㋑とする。
- $B(m+1,n+1)$ を，すなわち $\displaystyle\int_{0}^{1}x^{m}(1-x)^{n}\,dx$ を，㋒とする。
- $\displaystyle\int_{0}^{1}x^{m+n}\,dx$ を，㋓とする。

このとき，(9) 式，(10) 式，(11) 式は，それぞれ次のことを表している。

- (9) 式より，㋐ は ㋑ の $\dfrac{(-1)^{n}}{{}_{m+n}C_{n}}$ 倍である。
- (10) 式より，㋒ は ㋓ の $\dfrac{1}{{}_{m+n}C_{n}}$ 倍である。
- (11) 式より，㋑ は ㋓ の $(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ 倍である。

これを図示すれば，次のページのようになる。

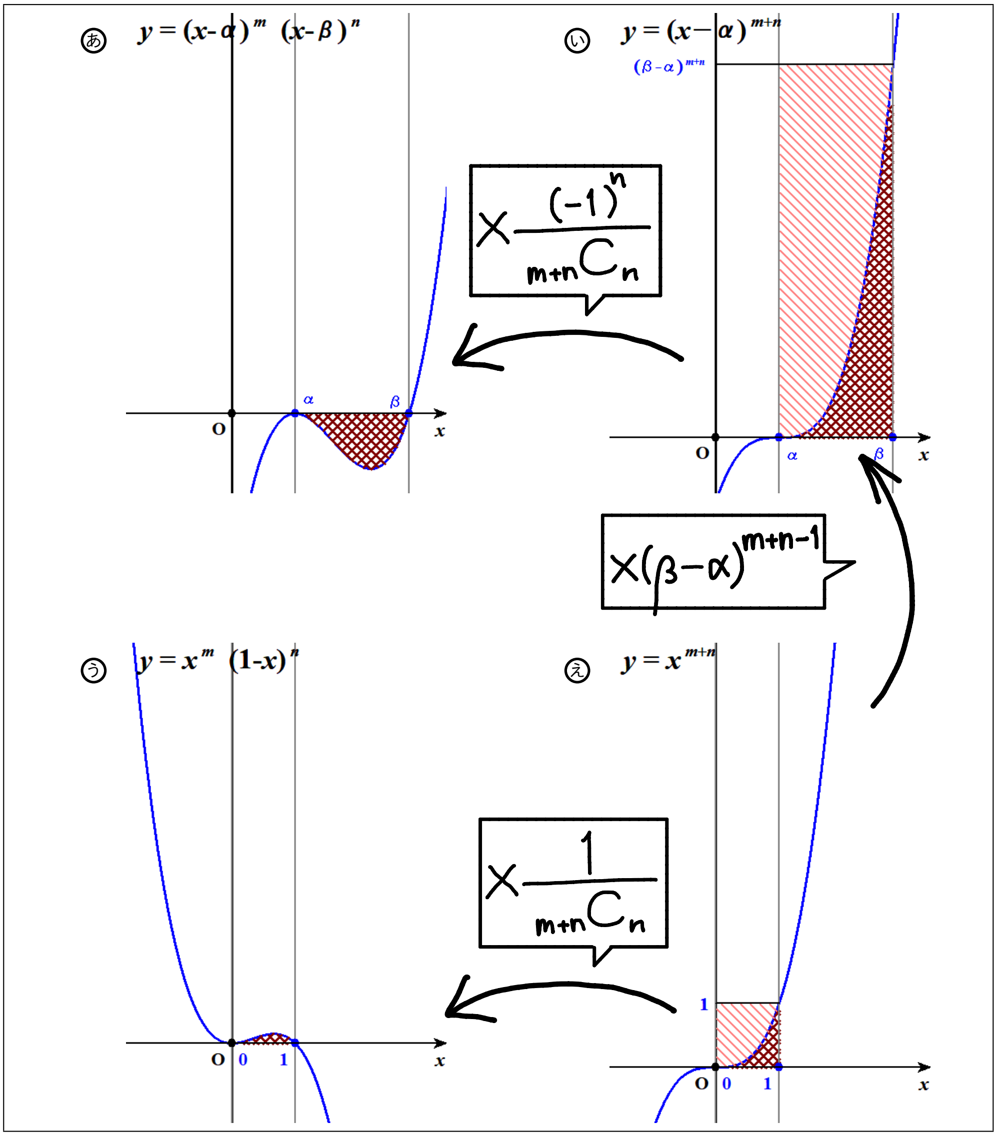


図 8　あ，い，う，えの関係

この図を見れば，「あ が う の $(-1)^n\cdot(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ 倍であること」，すなわち「$I_{\alpha,\beta}(m,n)$ が $B(m+1,n+1)$ の $(-1)^n\cdot(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ 倍であること」は，一目瞭然である。そして，これこそが，(8) 式

$$I_{\alpha,\beta}(m,n)\ =\ (-1)^n\cdot B(m+1,n+1)\cdot(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が意味するものである。

＊　＊　＊

本節をまとめると，次のようになる。(脚注 7) 。

[A]　$B(p, q)$ を $I_{\alpha,\beta}(m, n)$ で表すと，

$$B(p, q) = (-1)^{q-1} \cdot I_{0,1}(p-1, q-1)$$

[B]　$I_{\alpha,\beta}(m, n)$ を $B(p, q)$ で表すと，

$$I_{\alpha,\beta}(m, n) \;=\; (-1)^{n} \cdot B(m+1, n+1) \cdot (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

最後に，[A] と [B] を組み合わせて，

[C]　$I_{\alpha,\beta}(m, n)$ を $I_{\alpha,\beta}(m, n)$ で表す

を考えよう。

先ほど，[A] の式に $p = m+1$，$q = n+1$ を代入して

$$B(m+1, n+1) = (-1)^{n} \cdot I_{0,1}(m, n)$$

を求めた（(6) 式）。これを [B] の式に代入すれば

$$I_{\alpha,\beta}(m, n) \;=\; I_{0,1}(m, n) \cdot (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

となる。

これを通常の表記に戻せば

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{m}(x-\beta)^{n}\, dx \;=\; (\beta-\alpha)^{m+n+1} \cdot \int_{0}^{1} x^{m}(x-1)^{n}\, dx}$$

となるのだが，この等式はあまり広く知られていないだと感じているので，敢えてここに記しておくことにした (脚注 8) 。

(脚注 7)　前者は (5) 式，後者は (8) 式。

(脚注 8)　もちろんこれは，先ほど「計算するまでもなく」と断じた関係式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{m+n}\, dx = (\beta-\alpha)^{m+n+1} \cdot \int_{0}^{1} x^{m+n}\, dx$$

（(11) 式）とまったく同等である。

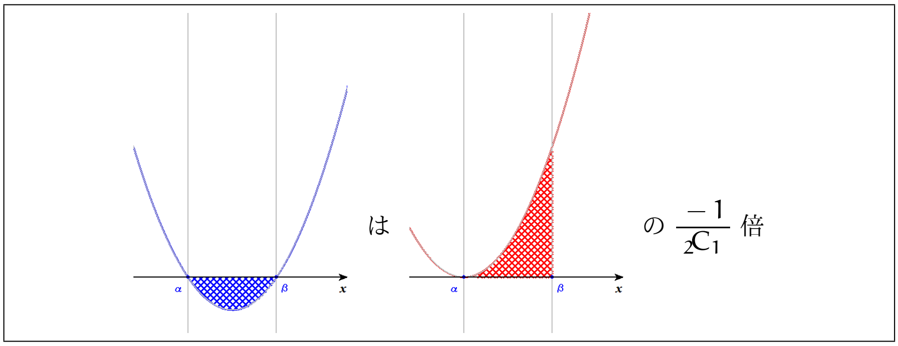
§ 3　$y=(x-\alpha)^m(x-\beta)^n$ のグラフと x 軸とで囲まれた面積

以下，$\alpha<\beta$ とする。また，本節における「符号付き面積」とは，曲線と x 軸で囲まれる図形が x 軸より上側にある場合に正，x 軸より下側にある場合に負とした面積である。

公式 **2–1** より $\boxed{\text{頻 出}}$

- 放物線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

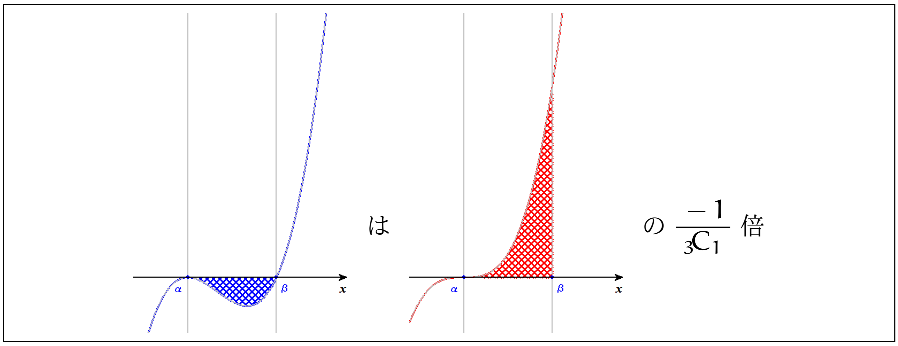
$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{-1}{{}_2C_1}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx$$



公式 3–1 より 頻出

- 曲線 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

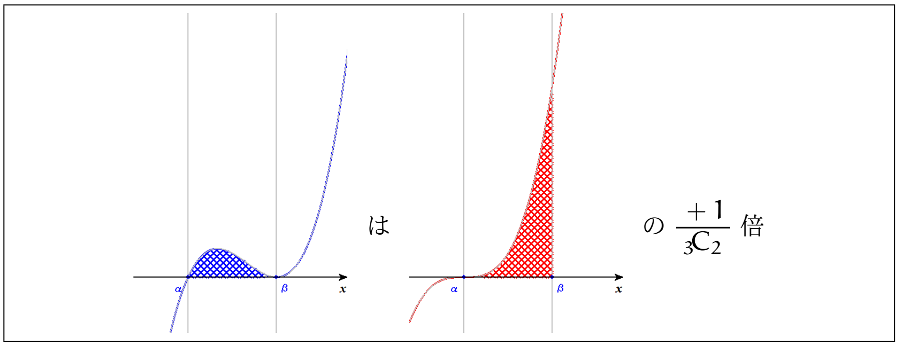
$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=\frac{-1}{{}_3C_1}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3\,dx$$



公式 3–2 より 頻出

- 曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

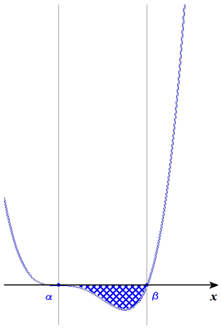
$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{+1}{{}_3C_2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3\,dx$$



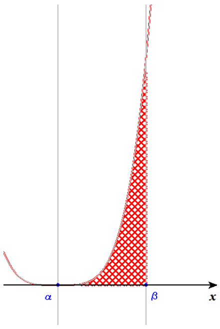
公式 4–1 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3(x-\beta)\,dx=\frac{-1}{{}_4C_1}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^4\,dx$$



は

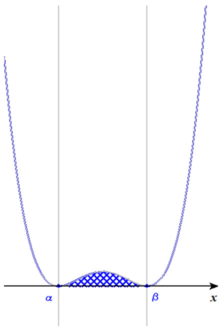


の $\frac{-1}{{}_4C_1}$ 倍

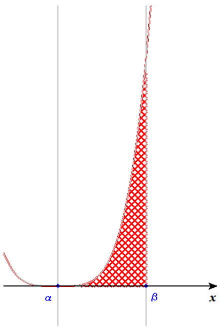
公式 4–2 より 頻 出

- 曲線 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=\frac{+1}{{}_4C_2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^4\,dx$$



は

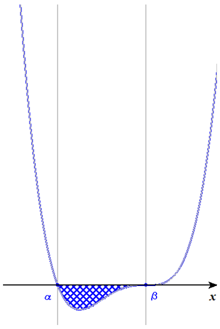


の $\frac{+1}{{}_4C_2}$ 倍

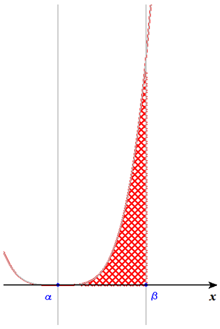
公式 4–3 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)^3$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^3\,dx=\frac{-1}{{}_4C_3}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^4\,dx$$



は

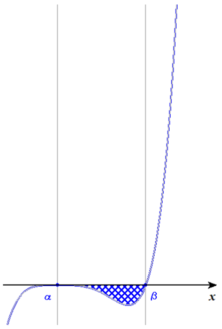


の $\frac{-1}{{}_4C_3}$ 倍

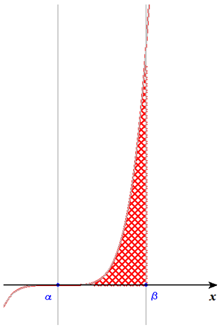
公式 5–1 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)^4(x-\beta)$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^4(x-\beta)\,dx=\frac{-1}{{}_5C_1}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^5\,dx$$



は

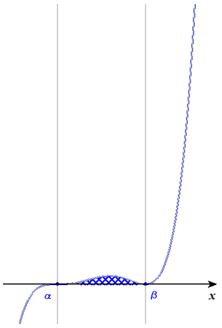


の $\dfrac{-1}{{}_5C_1}$ 倍

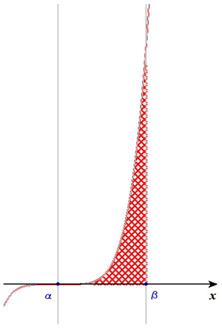
公式 5–2 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)^3(x-\beta)^2$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3(x-\beta)^2\,dx=\frac{+1}{{}_5C_2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^5\,dx$$



は

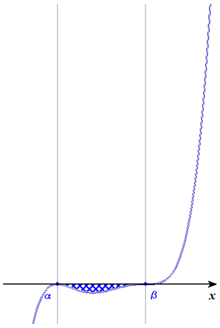


の $\dfrac{+1}{{}_5C_2}$ 倍

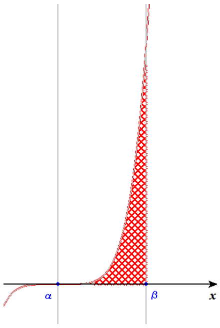
公式 5–3 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^3\,dx=\frac{-1}{{}_5C_3}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx$$



は

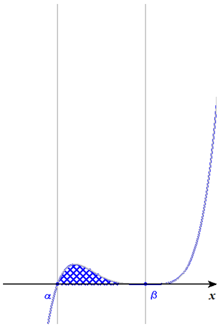


の $\frac{-1}{{}_5C_3}$ 倍

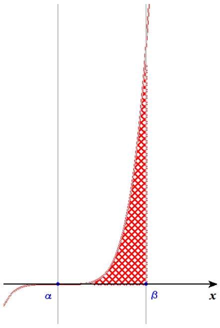
公式 5–4 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)^4$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^4\,dx=\frac{+1}{{}_5C_4}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^5\,dx$$



は

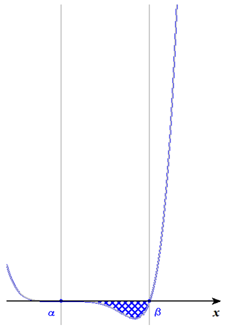


の $\frac{+1}{{}_5C_4}$ 倍

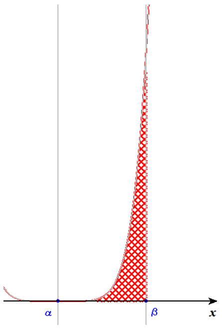
公式 6–1 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)^5(x-\beta)$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^5(x-\beta)\,dx=\frac{-1}{{}_6C_1}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^6\,dx$$



は

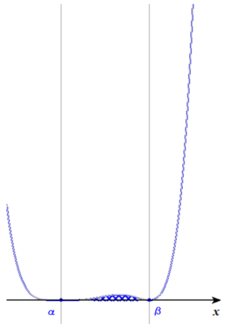


の $\dfrac{-1}{{}_6C_1}$ 倍

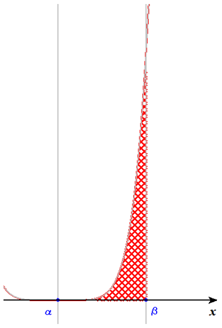
公式 6–2 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)^4(x-\beta)^2$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^4(x-\beta)^2\,dx=\frac{+1}{{}_6C_2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^6\,dx$$



は

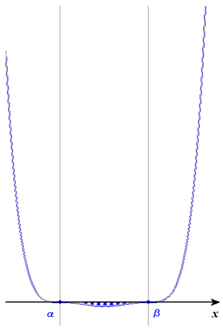


の $\dfrac{+1}{{}_6C_2}$ 倍

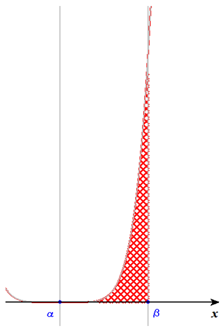
公式 6–3 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)^3(x-\beta)^3$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3(x-\beta)^3\,dx=\frac{-1}{{}_6C_3}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^6\,dx$$



は

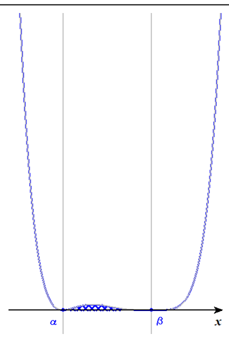


の $\frac{-1}{{}_6C_3}$ 倍

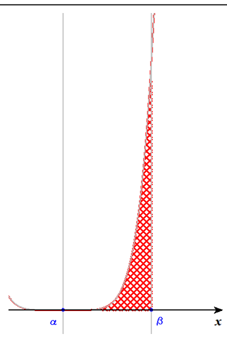
公式 6–4 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^4$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^4\,dx=\frac{+1}{{}_6C_4}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^6\,dx$$



は

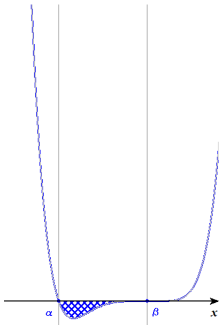


の $\frac{+1}{{}_6C_4}$ 倍

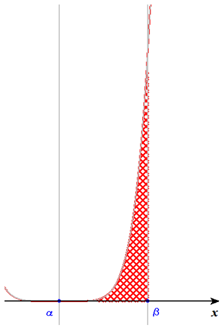
公式 6–5 より

- 曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)^5$ と x 軸で囲まれる図形の符号付き面積は

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^5\,dx = \frac{-1}{{}_6C_5}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^6\,dx$$



は



の $\frac{-1}{{}_6C_5}$ 倍