

円錐曲線の媒介変数表示

参拾萬数学工房

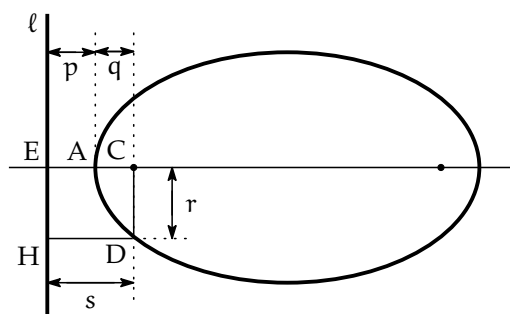
(<https://300000.net/>)

本稿では、 xy 平面上の任意の円錐曲線 $F(x, y) = 0$ を、「楕円」と「双曲線」と「放物線」の区別をすることなく、また位置や向きに関係なく、すべて同じ手法で媒介変数表示する方法を述べる。

§ 1 円錐曲線の決定

§ 1.1 楕円の決定

正円でない楕円において、長軸上にある頂点の 1 つを A とし、2 つの焦点のうち A に近い方の焦点を C 、焦点 C と対になる準線を ℓ 、準線 ℓ と長軸との交点を E とする。また、 C を通り準線 ℓ に平行な直線と楕円との 2 つの交点の 1 つを D とし、 D から準線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。



上図のように、 $EA = p$ 、 $AC = q$ 、 $CD = r$ (脚注 1)、 $EC = DH = s$ とする。この楕円の離心率が e (ただし $0 < e < 1$) であるとき、定数 p, q, r, s, e に対して、次の関係式が成り立つ。

- $q : p = r : s = e : 1$ (∵ 離心率の定義より)
- $s = p + q$ (∵ 上図より明らか)

これらの関係式から、定数 p, q, r, s, e のうちのいずれか 2 つが与えられれば、他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

例えば p と q が与えられている場合は、 r, s, e はそれぞれ p と q を用いて

$$r = \frac{q}{p}(p+q), \quad s = p+q, \quad e = \frac{q}{p}$$

(脚注 1) r は、楕円の「半直弦」と呼ばれる値である。双曲線 (§ 1.2)、放物線 (§ 1.3) についても同様。

と求まる。

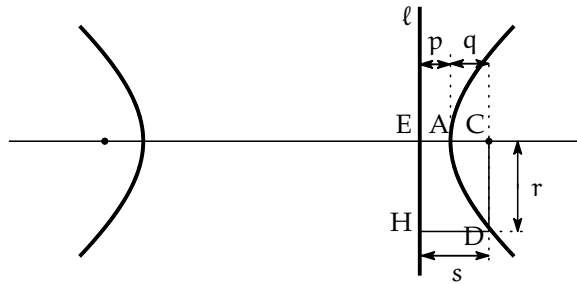
あるいは、例えば r と s が与えられている場合は、 p, q, e はそれぞれ r と s を用いて

$$p = \frac{s^2}{r+s}, \quad q = \frac{rs}{r+s}, \quad e = \frac{r}{s}$$

と求まる。

§ 1.2 双曲線の決定

双曲線において、頂点の1つを A とし、2つの焦点のうち A に近い方の焦点を C 、焦点 C と対になる準線を ℓ 、準線 ℓ と軸との交点を E とする。また、 C を通り準線 ℓ に平行な直線と双曲線との2つの交点の1つを D とし、 D から準線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。



上図のように、 $EA = p$ 、 $AC = q$ 、 $CD = r$ 、 $EC = DH = s$ とする。この双曲線の離心率が e (ただし $e > 1$) であるとき、定数 p, q, r, s, e に対して、次の関係式が成り立つ。

- $q : p = r : s = e : 1$ (∵ 離心率の定義より)
- $s = p + q$ (∵ 上図より明らか)

これらの関係式から、定数 p, q, r, s, e のうちのいずれか2つが与えられれば、他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

例えば p と q が与えられている場合は、 r, s, e はそれぞれ p と q を用いて

$$r = \frac{q}{p}(p+q), \quad s = p+q, \quad e = \frac{q}{p}$$

と求まる。

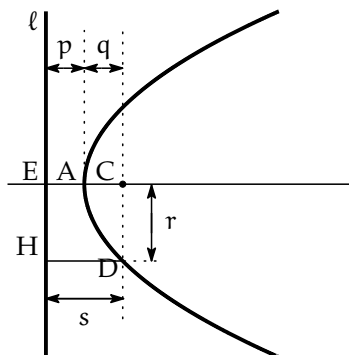
あるいは、例えば r と s が与えられている場合は、 p, q, e はそれぞれ r と s を用いて

$$p = \frac{s^2}{r+s}, \quad q = \frac{rs}{r+s}, \quad e = \frac{r}{s}$$

と求まる。

§ 1.3 放物線の決定

放物線において、頂点を A 、焦点を C 、準線を ℓ 、準線 ℓ と軸との交点を E とする。また、 C を通り準線 ℓ に平行な直線と放物線との 2 つの交点の 1 つを D とし、 D から準線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。



上図のように、 $EA = p$ 、 $AC = q$ 、 $CD = r$ 、 $EC = DH = s$ とするとき、定数 p, q, r, s に対して、次の関係式が成り立つ。

- $q : p = r : s = 1 : 1$ 、すなわち $p = q$ 、 $s = r$ (\because 放物線の定義より)
- $s = 2q$ ($\because p + q = s$ と $p = q$ より)

これらの関係式から、定数 p, q, r, s のうちのいずれか 1 つが与えられれば、他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

* * *

以上、わざわざ「(正円でない) 楕円」「双曲線」「放物線」に分類して述べてきたが、結局のところ、どの場合においても、 p, q, r, s, e のうちの 2 つが与えられれば円錐曲線の形状が確定することが確かめられた^(脚注 2)。

次節では、定数 r と s を与えて得られる円錐曲線について考察する。

(脚注 2) 放物線の場合は離心率 e が 1 であることが予めわかっている。

§ 2 円錐曲線の媒介変数表示

§ 2.1 射影による円の写像としての円錐曲線

2つの正の定数 r, s が与えられているものとする。

3次元ユークリッド空間 E^3 内に直線 l をとり、直線 l との距離が s であるように点 C をとる。また、直線 l と点 C によって定まる平面を α とする。

点 C から直線 l に下ろした垂線の足を E とし（すなわち $EC = s$ である）、点 E を通り平面 α に垂直な直線をとる。そして、この直線上に、 $EL = s$ となる点 L をとる。

さらに、点 C を中心とする半径 r の円を、直線 l と平行に、かつ平面 α と垂直になるようにおく。この円を X と名付ける。

以上のことを図示すると、次の図1のようになる。

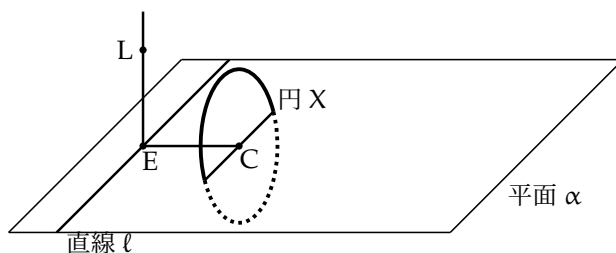


図1

定理

上のように定めた図形に対して、円 X の周上を動く動点を P とし、直線 LP と平面 α との交点を Q とする。(→ 図2)

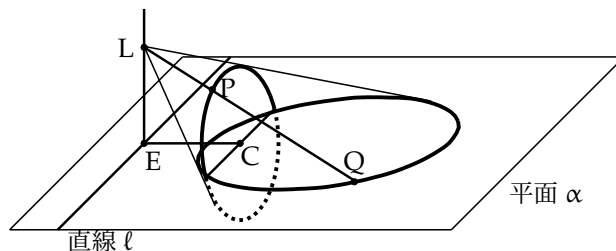


図2

このとき、動点 P に伴って動く点 Q の軌跡は、点 C を焦点、直線 l を準線とする、離心率 $\frac{r}{s}$ の円錐曲線となる。

証明

はじめに、この3次元ユークリッド空間 E^3 に、直線 CE を x 軸、直線 l に平行で点 C を通る直線を y 軸、直線 LE に平行で点 C を通る直線を z 軸とする座標系を導入する。ただし、 x 軸に関しては E から C に向かう方向を正の向きとし、 y 軸の向きは任意で、 z 軸はこの3軸が右手系をなすように定めるものとする。(→ 図3)

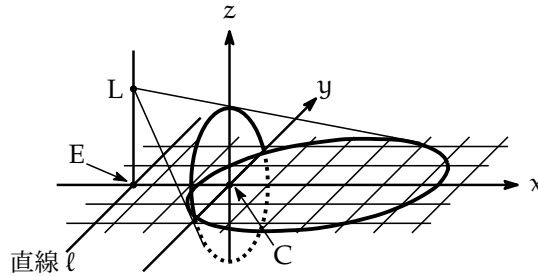


図3

このとき、平面 α は xy 平面であり、また点 C は $(0,0,0)$ 、点 E は $(-s,0,0)$ 、点 L は $(-s,0,s)$ または $(-s,0,-s)$ である (脚注3)。

さらに、円 X の周上を動く点 P の座標は、媒介変数 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて

$$P(0, r \sin \theta, r \cos \theta)$$

と表すことができる (脚注4)。

$s \neq r \cos \theta$ であるとき (脚注5)、直線 LP と xy 平面との交点 Q の座標は、ちょっとした計算によって

$$Q\left(\frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, \frac{r \sin \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, 0\right)$$

と求まる。そしてこのとき、

(脚注3) 点 L の z 座標の正負は、平面 α に y 軸を入れる際の方向の定め方によるとも言えるし、点 L の取り方 (点 L を平面 α に対してどちら側にとるか) によるとも言える。なお、点 L の z 座標の正負は、本節の議論にはまったく影響がない。

(脚注4) ここでは、 z 軸の正の向きを始線とする動径 CP の一般角を θ とし、その範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ に制限した。なお、本節においては動径 CP の回転の向きはどちらでも良いのだが、このあと §2.2 では、点 L の z 座標が正の場合には「 z 軸の正の方向から y 軸の正の方向への回転」を正の向きとし、点 L の z 座標が負の場合にはその逆を正の向きとする。

(脚注5) 「 $s \neq r \cos \theta$ であるとき」とは、ざっくりと言えば「動点 P が点 L と同じ高さにないとき」である。
 $s > r$ ならば円 X の周上に $s = r \cos \theta$ を満たす位置はないが、 $s = r$ ならば1ヶ所、 $s < r$ ならば2ヶ所、円 X の周上に $s = r \cos \theta$ を満たす位置が存在する。

そして、点 P がその位置にあるとき、直線 LP は xy 平面と交わらない。

- 2点 $C(0,0,0)$, $Q\left(\frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, \frac{r \sin \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, 0\right)$ 間の距離は,

$$\begin{aligned} CQ &= \sqrt{\left(\frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}\right)^2 + \left(\frac{r \sin \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{r}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}\right)^2 \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \left| \frac{r}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta} \right| = \frac{r}{\left| 1 - \frac{r}{s} \cos \theta \right|} \end{aligned}$$

- 点 Q と直線 l (y 軸) との距離を d とすると,

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta} - (-s) \right| \\ &= \left| \frac{s}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta} \right| = \frac{s}{\left| 1 - \frac{r}{s} \cos \theta \right|} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} CQ : d &= \frac{r}{\left| 1 - \frac{r}{s} \cos \theta \right|} : \frac{s}{\left| 1 - \frac{r}{s} \cos \theta \right|} \\ &= r : s \end{aligned}$$

ここで、 r と s は定数であるから、媒介変数 θ の値によらず（すなわち動点 P の位置によらず）、比 $CQ : d$ は一定である。

したがって、点 Q の軌跡は、点 C を焦点、直線 l を準線とする円錐曲線であり、その離心率は $\frac{r}{s}$ である。 (証明終)

次に、この図形における $s \rightarrow \infty$ とした場合の極限を考える。

このとき、 $LE = EC = s$ と $\angle LEC = \frac{\pi}{2}$ より、 $\angle LCE = \frac{\pi}{4}$ (一定) である。したがって、 $s \rightarrow \infty$ とした場合、直線 LP は「 xz 平面上にある、 x 軸とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ となる直線」となり、このとき交点 Q の軌跡は「半径 r の円」になる。

また、 $s \rightarrow \infty$ としたときの点 Q の極限は、

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} Q &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, \frac{r \sin \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, 0 \right) \\ &= (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \end{aligned}$$

となる。この座標が「 xy 平面上の原点 O を中心とする半径 r の円」の媒介変数表示を与えることは、一目瞭然であろう。

したがって、 $s \rightarrow \infty$ の場合まで考えることにすれば、この手法によって（正円の場合も含めて）任意の円錐曲線をつくることができることがわかった。

* * *

ところで、この定理の証明で導入した座標系は、あくまでも証明が容易となるように設定したに過ぎず、この定理自体は座標系のとり方によらず成り立つ。したがって、3次元ユークリッド空間 E^3 内のどのような位置に点 C と直線 l があったとしても、同様に平面 α 、円 X 、および点 L を設定することによって、「点 C を焦点、直線 l を準線とする離心率 $\frac{r}{s}$ の円錐曲線」および「点 C を中心とする半径 r の円」を、平面 α 上に描くことができる。

§ 2.2 円錐曲線の極方程式との関係

前節 § 2.1 で考えた図形における線分 CQ の長さ $\frac{r}{|1 - \frac{r}{s} \cos \theta|}$ は、 r, s と離心率 e との関係式 $r = es$ を利用して

$$CQ = \frac{es}{|1 - e \cos \theta|} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表すことができる。この形は、円錐曲線の極方程式

$$r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$

と酷似している。本節では、この2者の関係について簡単に述べる。

まず、①式の s と②式の a は、文字が違っただけで同じものを表している。したがって、①式と②式の実質的な違いは、「分母の絶対値の有無」と「分母第2項の正負」の2点である。

前者の違いは、①式の左辺 CQ が0以上であることに対して、②式の左辺 r は負の値も考えることによる。また、後者の違いは、極形式における角 θ の始線のとり方による。実際、一方の θ を $\theta + \pi$ と置換すれば他方に一致する。

したがって、この2者は、実質的に同じものであると言える。

* * *

以上のことから、極方程式 $r = \frac{es}{1 - e \cos \theta}$ で表される円錐曲線上の点 $Q(r, \theta)$ を xy 座標に直すと、

$$Q\left(\frac{es \cos \theta}{1 - e \cos \theta}, \frac{es \sin \theta}{1 - e \cos \theta}\right)$$

となることがわかる。

§ 2.3 xy 平面上の円錐曲線の媒介変数表示

前節 § 2.2 の最後で言及した通り、極方程式 $r = \frac{es}{1 - e \cos \theta}$ で表される円錐曲線上の点 Q の座標は

$$Q\left(\frac{es \cos \theta}{1 - e \cos \theta}, \frac{es \sin \theta}{1 - e \cos \theta}\right)$$

であるから、この円錐曲線は

$$\begin{cases} x = \frac{es \cos \theta}{1 - e \cos \theta} \\ y = \frac{es \sin \theta}{1 - e \cos \theta} \end{cases} \dots\dots ③$$

と媒介変数表示できることがわかる。

そして、xy 平面上の任意の円錐曲線（ただし正円を除く）は、この形の円錐曲線に「適切な回転移動」と「適切な平行移動」を施すことによって得られる。

すなわち、媒介変数表示③にその移動を表す変換を施すことによって、xy 平面上の任意の円錐曲線（ただし正円を除く）の媒介変数表示を得ることができる。

例 1

「点 $C\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ を焦点、直線 $l: 2x + y + 8\sqrt{5} = 0$ を準線とする、離心率 $\frac{1}{2}$ の楕円」を F_1 とする。この楕円の方程式は

$$16x^2 - 4xy + 19y^2 - 240 = 0$$

である（脚注 6）。

さて、楕円 F_1 の媒介変数表示を求めよう。

§ 1.1 における点 A, E の座標と定数 p, q, r, s, e は、ちょっとした計算によって、それぞれ

（脚注 6）楕円 F_1 上の点 Q を (x, y) とするとき、CQ の長さは $CQ = \sqrt{\left(x + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$ である。

また、点 Q と直線 $2x + y + 8\sqrt{5} = 0$ との距離を d とすると、 $d = \frac{|2x + y + 8\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}$ である。

ここで、離心率 $e = \frac{1}{2}$ より $CQ : d = 1 : 2$ であるから、

$$2 \cdot \sqrt{\left(x + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{|2x + y + 8\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}$$

これを整理すると $16x^2 - 4xy + 19y^2 - 240 = 0$ が得られる。

ちなみに、楕円 F_1 は、楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ を原点を中心として角 $+\varphi$ だけ回転移動したものである（ただ

し φ は $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ を満たす角）。

$$A\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right), \quad E\left(-\frac{16}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{\sqrt{5}}\right),$$

$$p=4, \quad q=2, \quad r=3, \quad s=6, \quad e=\frac{1}{2}$$

と求まる (脚注 7)。

このあと, § 2.1 と同じように円 X と点 L を定めて, 点 Q の軌跡として媒介変数表示を求めることもできる。しかし, それは手間がかかるので, ここでは平行移動と回転移動を利用する。

まず, 焦点 $C\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ を原点 $O(0,0)$ に移すために, x 軸方向に $+\frac{4}{\sqrt{5}}$, y 軸方向に $+\frac{2}{\sqrt{5}}$ だけ平行移動する。次に, 準線 $l: 2x + y + 8\sqrt{5} = 0$ を y 軸と平行にするために, $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ を満たす角を φ として, 原点を中心に $-\varphi$ だけ回転移動する (脚注 8)。この「移動後の楕円」は

$$\begin{cases} x &= \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} \\ y &= \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{cases}$$

と媒介変数表示することができる。

今度は, これをもとの楕円 F_1 に戻す。まず原点を中心に $+\varphi$ だけ回転移動すると,

$$\begin{cases} x &= \cos \varphi \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} - \sin \varphi \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \\ y &= \sin \varphi \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} + \cos \varphi \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{cases}$$

ここで, $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ であるから

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{cases}$$

となる。次に, x 軸方向に $-\frac{4}{\sqrt{5}}$, y 軸方向に $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ だけ平行移動すると

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} - \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(脚注 7) これらを求める方法・手順はいろいろ考えられるので, ここでは割愛する。

(脚注 8) 直線 l の法線ベクトルのうち, 長さが 1 であるものとして $\vec{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ をとると, 角 φ とは \vec{v} と x 軸の正の方向とのなす角である。原点を中心に $-\varphi$ だけ回転すると \vec{v} は x 軸の正の方向に重なり, 直線 l は y 軸と平行になる。

これが、楕円 F_1 ，すなわち楕円 $16x^2 - 4xy + 19y^2 - 240 = 0$ の媒介変数表示である。

(例 1 終)

例 2

「点 $C(4, 1)$ を焦点，直線 $l: x + y - 3 = 0$ を準線とする，離心率 $\sqrt{2}$ の双曲線」を F_2 とする。この双曲線の方程式は

$$xy + x - 2y - 4 = 0$$

である (脚注 9)。

さて，双曲線 F_2 の媒介変数表示を求めよう。

§ 1.2 における点 A, E の座標と定数 p, q, r, s, e は，ちょっとした計算によって，それぞれ

$$\begin{aligned} A(3, 0), \quad E(2, -1), \\ p = 2 - \sqrt{2}, \quad q = 2\sqrt{2} - 2, \quad r = 2, \quad s = \sqrt{2}, \quad e = \sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まる (脚注 10)。

このあと，§ 2.1 と同じように円 X と点 L を定めて，点 Q の軌跡として媒介変数表示を求めることもできる。しかし，それは手間がかかるので，ここでは平行移動と回転移動を利用する。

まず，焦点 $C(4, 1)$ を原点 $O(0, 0)$ に移すために， x 軸方向に -4 ， y 軸方向に -1 だけ平行移動する。次に，準線 $l: x + y - 3 = 0$ を y 軸と平行にするために， $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす角を φ として，原点を中心に $-\varphi$ だけ回転移動する (脚注 11)。この

(脚注 9) 双曲線 F_2 上の点 Q を (x, y) とするとき， CQ の長さは $CQ = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$ である。

また，点 Q と直線 $x + y - 3 = 0$ との距離を d とすると， $d = \frac{|x + y - 3|}{\sqrt{2}}$ である。

ここで，離心率 $e = \sqrt{2}$ より $CQ : d = \sqrt{2} : 1$ であるから，

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{|x + y - 3|}{\sqrt{2}}$$

これを整理すると $xy + x - 2y - 4 = 0$ が得られる。

ちなみに，双曲線 F_2 は，反比例 $y = \frac{2}{x}$ のグラフである直角双曲線を x 軸方向に $+2$ ， y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

(脚注 10) これらを求める方法・手順はいろいろ考えられるので，ここでは割愛する。

(脚注 11) 直線 l の法線ベクトルのうち，長さが 1 であるものとして $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ をとると，角 φ とは \vec{v} と x

軸の正の方向とのなす角である (言うまでもなく， $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) である)。原点を中心に $-\varphi$ だけ回転すると \vec{v} は x 軸の正の方向に重なり，直線 l は y 軸と平行になる。

「移動後の双曲線」は

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ y = \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \end{cases}$$

と媒介変数表示することができる。

今度は、これをもとの双曲線 F_2 に戻す。まず原点を中心に $+\varphi$ だけ回転移動すると、

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} - \sin \varphi \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ y = \sin \varphi \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + \cos \varphi \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \end{cases}$$

ここで、 $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \end{cases}$$

となる。次に、 x 軸方向に $+4$, y 軸方向に $+1$ だけ平行移動すると

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + 4 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + 1 \end{cases}$$

これが、双曲線 F_2 , すなわち双曲線 $xy + x - 2y - 4 = 0$ の媒介変数表示である。

(例 2 終)

例 1, **例 2** からわかるように、「焦点」と「準線」と「離心率」さえわかれば、同様の手順を踏むことによって、任意の円錐曲線の媒介変数表示を求めることができる (脚注 12)。

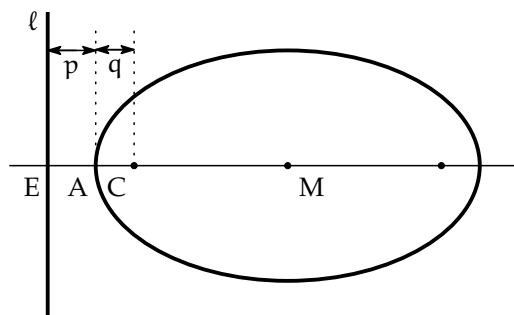
あとがきに代えて

本稿の執筆中に思わぬ発見があったので、最後にそれを記しておく。

まずは「(正円でない) 楕円」について。点 A, C, E , 直線 l , および正の数 p, q を, § 1.1 と同様に定める。また、この楕円の中心を M とする。

(脚注 12) 正円に対しては、 $s \rightarrow \infty$ とすることで、媒介変数表示を与えることができる。詳細は割愛するが、中心 (x_0, y_0) , 半径 r の円の媒介変数表示は、 y 軸に平行な準線に対する楕円から $s \rightarrow \infty$ とした場合には

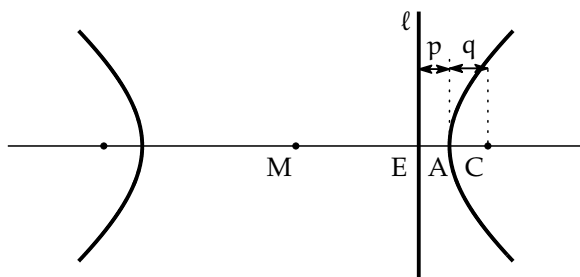
$$\begin{cases} x = r \cos \theta + x_0 \\ y = r \sin \theta + y_0 \end{cases} \text{ となる。}$$



このとき、ちょっとした計算によって、 CM, AM, EM の長さが、 p, q を用いて次のように表されることがわかる。

$$CM = \frac{q^2}{p-q}, \quad AM = \frac{pq}{p-q}, \quad EM = \frac{p^2}{p-q}$$

次に「双曲線」について。点 A, C, E 、直線 ℓ 、および正の数 p, q を、§ 1.2 と同様に定める。また、この双曲線の中心を M とする。



このとき、ちょっとした計算によって、 CM, AM, EM の長さが、 p, q を用いて次のように表されることがわかる。

$$CM = \frac{q^2}{q-p}, \quad AM = \frac{pq}{q-p}, \quad EM = \frac{p^2}{q-p}$$

そして、「(正円でない) 楕円」と「双曲線」の両者において、次の興味深い性質が得られるのである。

- $CM : AM = AM : EM = e : 1 \quad (\because q : p = e : 1)$