

# 円錐曲線の媒介変数表示

## 参拾萬数学工房

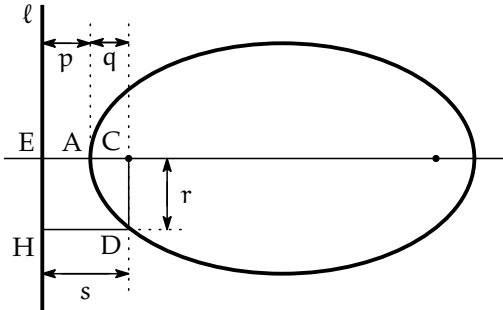
(<https://300000.net/>)

本稿では、 $xy$  平面上の任意の円錐曲線  $F(x, y) = 0$  を、「楕円」と「双曲線」と「放物線」の区別をすることなく、また位置や向きに関係なく、すべて同じ手法で媒介変数表示する方法を述べる。

## § 1 円錐曲線の決定

### § 1.1 楕円の決定

正円でない楕円において、長軸上にある頂点の1つを  $A$  とし、2つの焦点のうち  $A$  に近い方の焦点を  $C$ 、焦点  $C$  と対になる準線を  $\ell$ 、準線  $\ell$  と長軸との交点を  $E$  とする。また、 $C$  を通り準線  $\ell$  に平行な直線と楕円との2つの交点の1つを  $D$  とし、 $D$  から準線  $\ell$  に下ろした垂線の足を  $H$  とする。



上図のように、 $EA = p$ ,  $AC = q$ ,  $CD = r$  (脚注<sup>1</sup>),  $EC = DH = s$  とする。この楕円の離心率が  $e$  (ただし  $0 < e < 1$ ) であるとき、定数  $p, q, r, s, e$  に対して、次の関係式が成り立つ。

- $q : p = r : s = e : 1$  ( $\because$  異心率の定義より)
- $s = p + q$  ( $\because$  上図より明らか)

これらの関係式から、定数  $p, q, r, s, e$  のうちのいずれか2つが与えられれば、他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

例えば  $p$  と  $q$  が与えられている場合は、 $r, s, e$  はそれぞれ  $p$  と  $q$  を用いて

$$r = \frac{q}{p}(p+q), \quad s = p+q, \quad e = \frac{q}{p}$$

(脚注<sup>1</sup>)  $r$  は、楕円の「半直弦」と呼ばれる値である。双曲線 (§ 1.2), 放物線 (§ 1.3) についても同様。

と求まる。

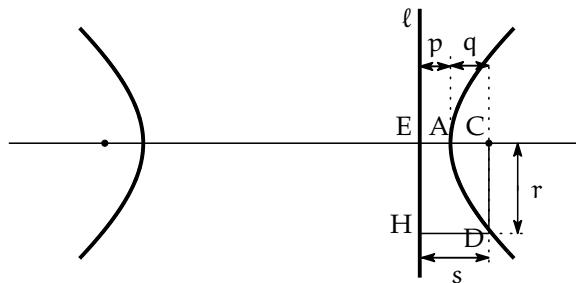
あるいは、例えば  $r$  と  $s$  が与えられている場合は、 $p, q, e$  はそれぞれ  $r$  と  $s$  を用いて

$$p = \frac{s^2}{r+s}, \quad q = \frac{rs}{r+s}, \quad e = \frac{r}{s}$$

と求まる。

## § 1.2 双曲線の決定

双曲線において、頂点の1つを  $A$  とし、2つの焦点のうち  $A$  に近い方の焦点を  $C$ 、焦点  $C$  と対になる準線を  $\ell$ 、準線  $\ell$  と軸との交点を  $E$  とする。また、 $C$  を通り準線  $\ell$  に平行な直線と双曲線との2つの交点の1つを  $D$  とし、 $D$  から準線  $\ell$  に下ろした垂線の足を  $H$  とする。



上図のように、 $EA = p$ ,  $AC = q$ ,  $CD = r$ ,  $EC = DH = s$  とする。この双曲線の離心率が  $e$  (ただし  $e > 1$ ) であるとき、定数  $p, q, r, s, e$  に対して、次の関係式が成り立つ。

- $q : p = r : s = e : 1 \quad (\because \text{離心率の定義より})$
- $s = p + q \quad (\because \text{上図より明らか})$

これらの関係式から、定数  $p, q, r, s, e$  のうちのいずれか2つが与えられれば、他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

例えば  $p$  と  $q$  が与えられている場合は、 $r, s, e$  はそれぞれ  $p$  と  $q$  を用いて

$$r = \frac{q}{p}(p+q), \quad s = p+q, \quad e = \frac{q}{p}$$

と求まる。

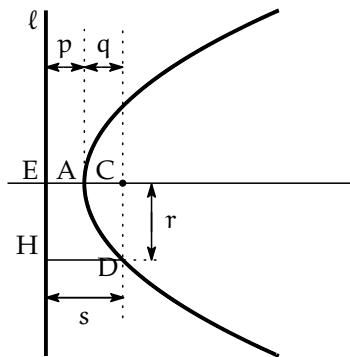
あるいは、例えば  $r$  と  $s$  が与えられている場合は、 $p, q, e$  はそれぞれ  $r$  と  $s$  を用いて

$$p = \frac{s^2}{r+s}, \quad q = \frac{rs}{r+s}, \quad e = \frac{r}{s}$$

と求まる。

### § 1.3 放物線の決定

放物線において、頂点を  $A$ 、焦点を  $C$ 、準線を  $\ell$ 、準線  $\ell$  と軸との交点を  $E$  とする。また、 $C$  を通り準線  $\ell$  に平行な直線と放物線との 2 つの交点の 1 つを  $D$  とし、 $D$  から準線  $\ell$  に下ろした垂線の足を  $H$  とする。



上図のように、 $EA = p$ ,  $AC = q$ ,  $CD = r$ ,  $EC = DH = s$  とするとき、定数  $p, q, r, s$  に対して、次の関係式が成り立つ。

- $q : p = r : s = 1 : 1$ , すなわち  $p = q$ ,  $s = r$  ( $\because$  放物線の定義より)
- $s = 2q$  ( $\because p + q = s$  と  $p = q$  より)

これらの関係式から、定数  $p, q, r, s$  のうちのいずれか 1 つが与えられれば、他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

\* \* \*

以上、わざわざ「(正円でない) 楕円」「双曲線」「放物線」に分類して述べてきたが、結局のところ、どの場合においても、 $p, q, r, s, e$  のうちの 2 つが与えられれば円錐曲線の形状が確定することが確かめられた<sup>(脚注 2)</sup>。

次節では、定数  $r$  と  $s$  を与えて得られる円錐曲線について考察する。

(脚注 2) 放物線の場合は離心率  $e$  が 1 であることが予めわかっている。

## § 2 円錐曲線の媒介変数表示

### § 2.1 射影による円の写像としての円錐曲線

2つの正の定数  $r, s$  が与えられているものとする。

3次元ユークリッド空間  $E^3$  内に直線  $\ell$  をとり、直線  $\ell$  との距離が  $s$  であるように点  $C$  をとる。また、直線  $\ell$  と点  $C$  によって定まる平面を  $\alpha$  とする。

点  $C$  から直線  $\ell$  に下ろした垂線の足を  $E$  とし（すなわち  $EC = s$  である）、点  $E$  を通り平面  $\alpha$  に垂直な直線をとる。そして、この直線上に、 $EL = s$  となる点  $L$  をとる。

さらに、点  $C$  を中心とする半径  $r$  の円を、直線  $\ell$  と平行に、かつ平面  $\alpha$  と垂直になるようおく。この円を  $X$  と名付ける。

以上のことと図示すると、次の図 1 のようになる。

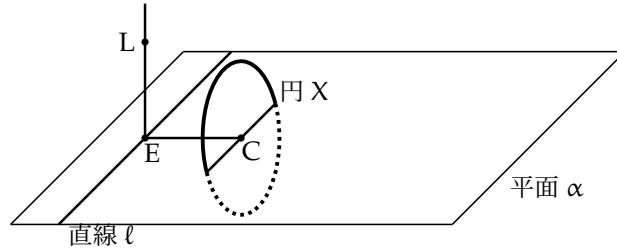


図 1

#### 定理

上のように定めた図形に対して、円  $X$  の周上を動く動点を  $P$  とし、直線  $LP$  と平面  $\alpha$  との交点を  $Q$  とする。（→図 2）

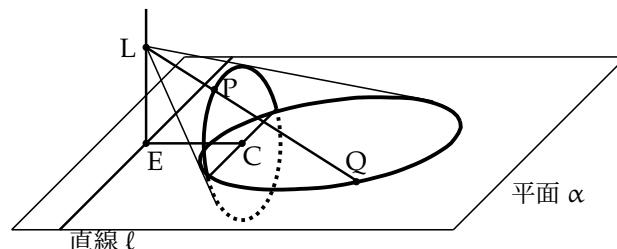


図 2

このとき、動点  $P$  に伴って動く点  $Q$  の軌跡は、点  $C$  を焦点、直線  $\ell$  を準線とする、離心率  $\frac{r}{s}$  の円錐曲線となる。

証明

はじめに、この3次元ユークリッド空間  $E^3$  に、直線  $CE$  を  $x$  軸、直線  $\ell$  に平行で点  $C$  を通る直線を  $y$  軸、直線  $LE$  に平行で点  $C$  を通る直線を  $z$  軸とする座標系を導入する。ただし、 $x$  軸に関しては  $E$  から  $C$  に向かう方向を正の向きとし、 $y$  軸の向きは任意で、 $z$  軸はこの3軸が右手系をなすように定めるものとする。(→ 図3)

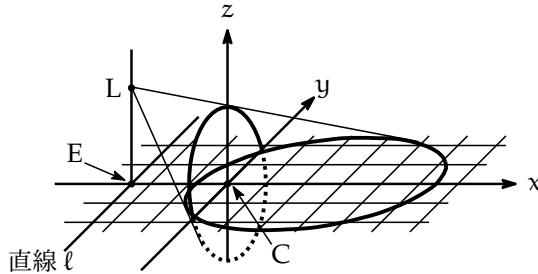


図3

このとき、平面  $\alpha$  は  $xy$  平面であり、また点  $C$  は  $(0,0,0)$ 、点  $E$  は  $(-s,0,0)$ 、点  $L$  は  $(-s,0,s)$  または  $(-s,0,-s)$  である(脚注3)。

さらに、円  $X$  の周上を動く点  $P$  の座標は、媒介変数  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) を用いて

$$P(0, r \sin \theta, r \cos \theta)$$

と表すことができる(脚注4)。

$s \neq r \cos \theta$  であるとき(脚注5)、直線  $LP$  と  $xy$  平面との交点  $Q$  の座標は、ちょっとした計算によって

$$Q\left(\frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, \frac{r \sin \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, 0\right)$$

と求まる。そしてこのとき、

(脚注3) 点  $L$  の  $z$  座標の正負は、平面  $\alpha$  に  $y$  軸を入れる際の方向の定め方によるとも言えるし、点  $L$  の取り方(点  $L$  を平面  $\alpha$  に対してどちら側にとるか)によるとも言える。なお、点  $L$  の  $z$  座標の正負は、本節の議論にはまったく影響がない。

(脚注4) ここでは、 $z$  軸の正の向きを始線とする動径  $CP$  の一般角を  $\theta$  とし、その範囲を  $0 \leq \theta < 2\pi$  に制限した。なお、本節においては動径  $CP$  の回転の向きはどちらでも良いのだが、このあと § 2.2 では、点  $L$  の  $z$  座標が正の場合には「 $z$  軸の正の方向から  $y$  軸の正の方向への回転」を正の向きとし、点  $L$  の  $z$  座標が負の場合にはその逆を正の向きとする。

(脚注5) 「 $s \neq r \cos \theta$  であるとき」とは、ざっくりと言えば「動点  $P$  が点  $L$  と同じ高さにないとき」である。  
 $s > r$  ならば円  $X$  の周上に  $s = r \cos \theta$  を満たす位置はないが、 $s = r$  ならば1ヶ所、 $s < r$  ならば2ヶ所、円  $X$  の周上に  $s = r \cos \theta$  を満たす位置が存在する。

そして、点  $P$  がその位置にあるとき、直線  $LP$  は  $xy$  平面と交わらない。

- 2 点  $C(0, 0, 0), Q\left(\frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, \frac{r \sin \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, 0\right)$  間の距離は,

$$\begin{aligned} CQ &= \sqrt{\left(\frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}\right)^2 + \left(\frac{r \sin \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{r}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}\right)^2 \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \left| \frac{r}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta} \right| = \frac{r}{\left|1 - \frac{r}{s} \cos \theta\right|} \end{aligned}$$

- 点  $Q$  と直線  $\ell$  ( $y$  軸) との距離を  $d$  とすると,

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta} - (-s) \right| \\ &= \left| \frac{s}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta} \right| = \frac{s}{\left|1 - \frac{r}{s} \cos \theta\right|} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} CQ : d &= \frac{r}{\left|1 - \frac{r}{s} \cos \theta\right|} : \frac{s}{\left|1 - \frac{r}{s} \cos \theta\right|} \\ &= r : s \end{aligned}$$

ここで,  $r$  と  $s$  は定数であるから, 媒介変数  $\theta$  の値によらず (すなわち動点  $P$  の位置によらず), 比  $CQ : d$  は一定である。

したがって, 点  $Q$  の軌跡は, 点  $C$  を焦点, 直線  $\ell$  を準線とする円錐曲線であり, その離心率は  $\frac{r}{s}$  である。 (証明終)

次に, この図形における  $s \rightarrow \infty$  とした場合の極限を考える。

このとき,  $LE = EC = s$  と  $\angle LEC = \frac{\pi}{2}$  より,  $\angle LCE = \frac{\pi}{4}$  (一定) である。したがって,

$s \rightarrow \infty$  とした場合, 直線  $LP$  は「 $xz$  平面上にある,  $x$  軸とのなす角が  $\frac{\pi}{4}$  となる直線」となり, このとき交点  $Q$  の軌跡は「半径  $r$  の円」になる。

また,  $s \rightarrow \infty$  としたときの点  $Q$  の極限は,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} Q &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{r \cos \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, \frac{r \sin \theta}{1 - \frac{r}{s} \cos \theta}, 0 \right) \\ &= (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \end{aligned}$$

となる。この座標が「 $xy$  平面上の原点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円」の媒介変数表示を与えることは, 一目瞭然であろう。

したがって,  $s \rightarrow \infty$  の場合まで考えることにすれば, この手法によって (正円の場合も含めて) 任意の円錐曲線をつくることができる事がわかった。

\* \* \*

ところで、この定理の証明で導入した座標系は、あくまでも証明が容易となるように設定したに過ぎず、この定理自体は座標系のとり方によらず成り立つ。したがって、3次元ユークリッド空間  $E^3$  内のどのような位置に点  $C$  と直線  $\ell$  があったとしても、同様に平面  $\alpha$ 、円  $X$ 、および点  $L$  を設定することによって、「点  $C$  を焦点、直線  $\ell$  を準線とする離心率  $\frac{r}{s}$  の円錐曲線」および「点  $C$  を中心とする半径  $r$  の円」を、平面  $\alpha$  上に描くことができる。

## § 2.2 円錐曲線の極方程式との関係

前節 § 2.1 で考えた図形における線分  $CQ$  の長さ  $\frac{r}{|1 - \frac{r}{s} \cos \theta|}$  は、 $r, s$  と離心率  $e$  との関係式  $r = es$  を利用して

$$CQ = \frac{es}{|1 - e \cos \theta|} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表すことができる。この形は、円錐曲線の極方程式

$$r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$

と酷似している。本節では、この 2 者の関係について簡単に述べる。

まず、①式の  $s$  と②式の  $a$  は、文字が違うだけで同じものを表している。したがって、①式と②式の実質的な違いは、「分母の絶対値の有無」と「分母第 2 項の正負」の 2 点である。

前者の違いは、①式の左辺  $CQ$  が 0 以上であることに対して、②式の左辺  $r$  は負の値も考えることによる。また、後者の違いは、極形式における角  $\theta$  の始線のとり方による。実際、一方の  $\theta$  を  $\theta + \pi$  と置換すれば他方に一致する。

したがって、この 2 者は、実質的に同じものであると言える。

\* \* \*

以上のことから、極方程式  $r = \frac{es}{1 - e \cos \theta}$  で表される円錐曲線上の点  $Q(r, \theta)$  を  $xy$  座標に直すと、

$$Q\left(\frac{es \cos \theta}{1 - e \cos \theta}, \frac{es \sin \theta}{1 - e \cos \theta}\right)$$

となることがわかる。

### § 2.3 $xy$ 平面上の円錐曲線の媒介変数表示

前節 § 2.2 の最後で言及した通り、極方程式  $r = \frac{es}{1 - e \cos \theta}$  で表される円錐曲線上の点  $Q$  の座標は

$$Q\left(\frac{es \cos \theta}{1 - e \cos \theta}, \frac{es \sin \theta}{1 - e \cos \theta}\right)$$

であるから、この円錐曲線は

$$\begin{cases} x = \frac{es \cos \theta}{1 - e \cos \theta} \\ y = \frac{es \sin \theta}{1 - e \cos \theta} \end{cases} \dots \dots \dots \quad ③$$

と媒介変数表示できることがわかる。

そして、 $xy$  平面上の任意の円錐曲線（ただし正円を除く）は、この形の円錐曲線に「適切な回転移動」と「適切な平行移動」を施すことによって得られる。

すなわち、媒介変数表示③にその移動を表す変換を施すことによって、 $xy$  平面上の任意の円錐曲線（ただし正円を除く）の媒介変数表示を得ることができる。

### 例 1

「点  $C\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  を焦点, 直線  $\ell: 2x + y + 8\sqrt{5} = 0$  を準線とする, 离心率  $\frac{1}{2}$  の橙円」を  $F_1$  とする。この橙円の方程式は

$$16x^2 - 4xy + 19y^2 - 240 = 0$$

である(脚注6)。

さて、橢円  $F_1$  の媒介変数表示を求めよう。

§1.1 における点 A-E の座標と定数 p,q,r,s,e は、ちょっととした計算によつて、それぞれ

(脚注 6) 楕円  $F_1$  上の点  $Q$  を  $(x, y)$  とするとき,  $CQ$  の長さは  $CQ = \sqrt{\left(x + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$  である。  
 また, 点  $Q$  と直線  $2x + y + 8\sqrt{5} = 0$  との距離を  $d$  とすると,  $d = \frac{|2x + y + 8\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}$  である。

ここで、離心率  $e = \frac{1}{2}$  より  $CQ : d = 1 : 2$  であるから、

$$2 \cdot \sqrt{\left(x + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{|2x + y + 8\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}$$

これを整理すると  $16x^2 - 4xy + 19y^2 - 240 = 0$  が得られる。

ちなみに、楕円  $F_1$  は、楕円  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  を原点を中心として角  $+ \varphi$  だけ回転移動したものである（ただし  $\varphi$  は  $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$  を満たす角）。

$$A\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right), \quad E\left(-\frac{16}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{\sqrt{5}}\right), \\ p = 4, \quad q = 2, \quad r = 3, \quad s = 6, \quad e = \frac{1}{2}$$

と求まる（脚注 7）。

このあと、§2.1 と同じように円  $X$  と点  $L$  を定めて、点  $Q$  の軌跡として媒介変数表示を求めることもできる。しかし、それは手間がかかるので、ここでは平行移動と回転移動を利用する。

まず、焦点  $C\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  を原点  $O(0, 0)$  に移すために、 $x$  軸方向に  $+\frac{4}{\sqrt{5}}$ 、 $y$  軸方向に  $+\frac{2}{\sqrt{5}}$  だけ平行移動する。次に、準線  $\ell: 2x + y + 8\sqrt{5} = 0$  を  $y$  軸と平行にするために、 $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$  を満たす角を  $\varphi$  として、原点を中心に  $-\varphi$  だけ回転移動する（脚注 8）。この「移動後の橙円」は

$$\begin{cases} x = \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} \\ y = \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{cases}$$

と媒介変数表示することができる。

今度は、これをもとの橙円  $F_1$  に戻す。まず原点を中心に  $+\varphi$  だけ回転移動すると、

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} - \sin \varphi \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \\ y = \sin \varphi \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} + \cos \varphi \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{cases}$$

ここで、 $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$  であるから

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{cases}$$

となる。次に、 $x$  軸方向に  $-\frac{4}{\sqrt{5}}$ 、 $y$  軸方向に  $-\frac{2}{\sqrt{5}}$  だけ平行移動すると

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} - \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \cos \theta}{2 - \cos \theta} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6 \sin \theta}{2 - \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(脚注 7) これらを求める方法・手順はいろいろ考えられるので、ここでは割愛する。

(脚注 8) 直線  $\ell$  の法線ベクトルのうち、長さが 1 であるものとして  $\vec{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  をとると、角  $\varphi$  とは  $\vec{v}$  と  $x$  軸の正の方向とのなす角である。原点を中心に  $-\varphi$  だけ回転すると  $\vec{v}$  は  $x$  軸の正の方向に重なり、直線  $\ell$  は  $y$  軸と平行になる。

これが、橢円  $F_1$ 、すなわち橢円  $16x^2 - 4xy + 19y^2 - 240 = 0$  の媒介変数表示である。

(例1終)

**例2**

「点  $C(4, 1)$  を焦点、直線  $\ell: x + y - 3 = 0$  を準線とする、離心率  $\sqrt{2}$  の双曲線」を  $F_2$  とする。この双曲線の方程式は

$$xy + x - 2y - 4 = 0$$

である（脚注9）。

さて、双曲線  $F_2$  の媒介変数表示を求めよう。

§1.2 における点  $A, E$  の座標と定数  $p, q, r, s, e$  は、ちょっとした計算によって、それぞれ

$$\begin{aligned} A(3, 0), \quad E(2, -1), \\ p = 2 - \sqrt{2}, \quad q = 2\sqrt{2} - 2, \quad r = 2, \quad s = \sqrt{2}, \quad e = \sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まる（脚注10）。

このあと、§2.1 と同じように円  $X$  と点  $L$  を定めて、点  $Q$  の軌跡として媒介変数表示を求める事もできる。しかし、それは手間がかかるので、ここでは平行移動と回転移動を利用する。

まず、焦点  $C(4, 1)$  を原点  $O(0, 0)$  に移すために、 $x$  軸方向に  $-4$ 、 $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動する。次に、準線  $\ell: x + y - 3 = 0$  を  $y$  軸と平行にするために、 $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  を満たす角を  $\varphi$  として、原点を中心に  $-\varphi$  だけ回転移動する（脚注11）。この

(脚注9) 双曲線  $F_2$  上の点  $Q$  を  $(x, y)$  とするとき、 $CQ$  の長さは  $CQ = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$  である。

また、点  $Q$  と直線  $x + y - 3 = 0$  との距離を  $d$  とすると、 $d = \frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}$  である。

ここで、離心率  $e = \sqrt{2}$  より  $CQ : d = \sqrt{2} : 1$  であるから、

$$\cdot \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}$$

これを整理すると  $xy + x - 2y - 4 = 0$  が得られる。

ちなみに、双曲線  $F_2$  は、反比例  $y = \frac{2}{x}$  のグラフである直角双曲線を  $x$  軸方向に  $+2$ 、 $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したものである。

(脚注10) これらを求める方法・手順はいろいろ考えられるので、ここでは割愛する。

(脚注11) 直線  $\ell$  の法線ベクトルのうち、長さが 1 であるものとして  $\vec{v} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  をとると、角  $\varphi$  とは  $\vec{v}$  と  $x$

軸の正の方向とのなす角である（言うまでもなく、 $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) である）。原点を中心に  $-\varphi$  だけ回転すると  $\vec{v}$  は  $x$  軸の正の方向に重なり、直線  $\ell$  は  $y$  軸と平行になる。

「移動後の双曲線」は

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ y = \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \end{cases}$$

と媒介変数表示することができる。

今度は、これをもとの双曲線  $F_2$  に戻す。まず原点を中心に  $+\varphi$  だけ回転移動すると、

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} - \sin \varphi \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ y = \sin \varphi \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + \cos \varphi \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \end{cases}$$

ここで、 $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  であるから

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \end{cases}$$

となる。次に、 $x$  軸方向に  $+4$ ,  $y$  軸方向に  $+1$  だけ平行移動すると

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + 4 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} + 1 \end{cases}$$

これが、双曲線  $F_2$ , すなわち双曲線  $xy + x - 2y - 4 = 0$  の媒介変数表示である。

(例 2 終)

**例 1**, **例 2** からわかるように、「焦点」と「準線」と「離心率」さえわかれば、同様の手順を踏むことによって、任意の円錐曲線の媒介変数表示を求めることができる（脚注 12）。

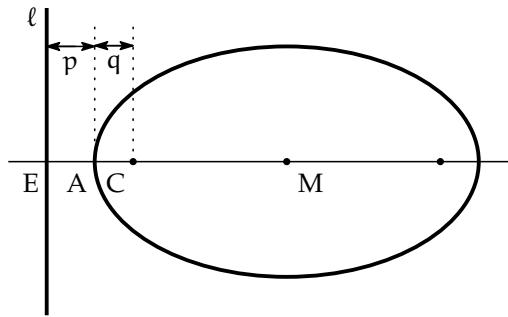
## あとがきに代えて

本稿の執筆中に思わぬ発見があったので、最後にそれを記しておく。

まずは「(正円でない) 楕円」について。点  $A, C, E$ , 直線  $\ell$ , および正の数  $p, q$  を, § 1.1 と同様に定める。また、この楕円の中心を  $M$  とする。

(脚注 12) 正円に対しては、 $s \rightarrow \infty$  とすることで、媒介変数表示を与えることができる。詳細は割愛するが、中心  $(x_0, y_0)$ , 半径  $r$  の円の媒介変数表示は、 $y$  軸に平行な準線に対する楕円から  $s \rightarrow \infty$  とした場合には

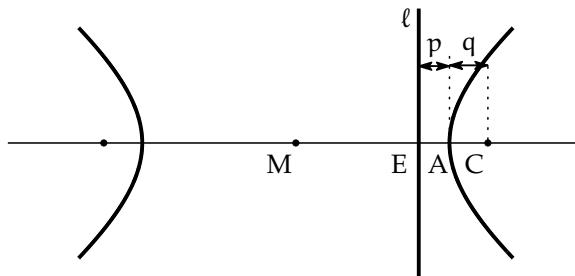
$$\begin{cases} x = r \cos \theta + x_0 \\ y = r \sin \theta + y_0 \end{cases} \text{となる。}$$



このとき、ちょっとした計算によって、 $CM, AM, EM$  の長さが、 $p, q$  を用いて次のように表されることがわかる。

$$CM = \frac{q^2}{p-q}, \quad AM = \frac{pq}{p-q}, \quad EM = \frac{p^2}{p-q}$$

次に「双曲線」について。点  $A, C, E$ , 直線  $\ell$ , および正の数  $p, q$  を、§1.2 と同様に定める。また、この双曲線の中心を  $M$  とする。



このとき、ちょっとした計算によって、 $CM, AM, EM$  の長さが、 $p, q$  を用いて次のように表されることがわかる。

$$CM = \frac{q^2}{q-p}, \quad AM = \frac{pq}{q-p}, \quad EM = \frac{p^2}{q-p}$$

そして、「(正円でない) 楕円」と「双曲線」の両者において、次の興味深い性質が得られるのである。

- $CM : AM = AM : EM = e : 1$  ( $\because q : p = e : 1$ )