三角関数の諸公式の，図を見て分かる証明

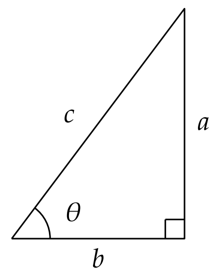
（鋭角 θ に対する）三角比の基本関係式

右の直角三角形において

$$\sin\theta = \frac{a}{c},\quad \cos\theta = \frac{b}{c},\quad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

これらから，次の関係式が直ちに導かれる。

- （a と c の関係）　$\boxed{a = c\sin\theta}$,　$\boxed{c = \dfrac{a}{\sin\theta}}$
- （b と c の関係）　$\boxed{b = c\cos\theta}$,　$\boxed{c = \dfrac{b}{\cos\theta}}$
- （a と b の関係）　$\boxed{a = b\tan\theta}$,　$\boxed{b = \dfrac{a}{\tan\theta}}$



これを用いて，様々な等式を図で証明しよう。

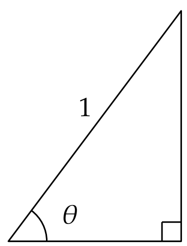
相互関係

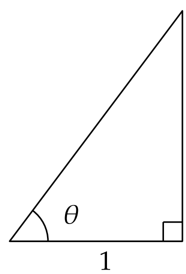
相互関係 [1]　（$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関係）　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

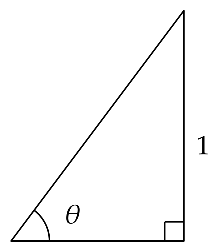
相互関係 [2]　（$\tan\theta$ と $\cos\theta$ の関係）　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

相互関係 [3]　（$\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係）　$1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

θ が鋭角の場合の，図による証明





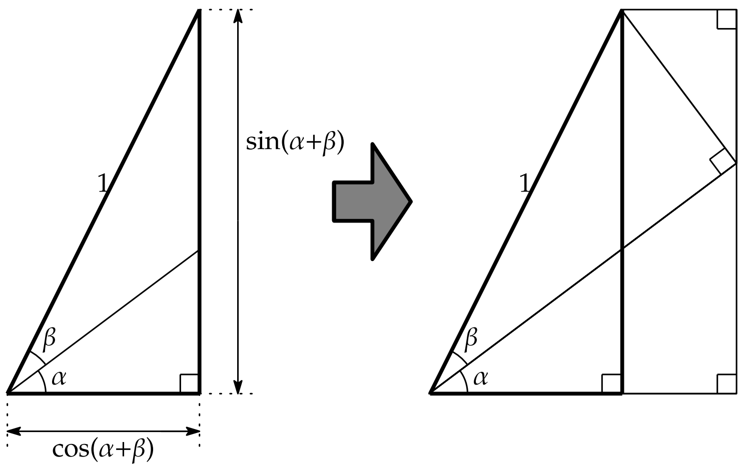


加法定理 [1–a]，[2–a]

加法定理 **[1–a]**　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

加法定理 **[2–a]**　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

α，β，$\alpha+\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明

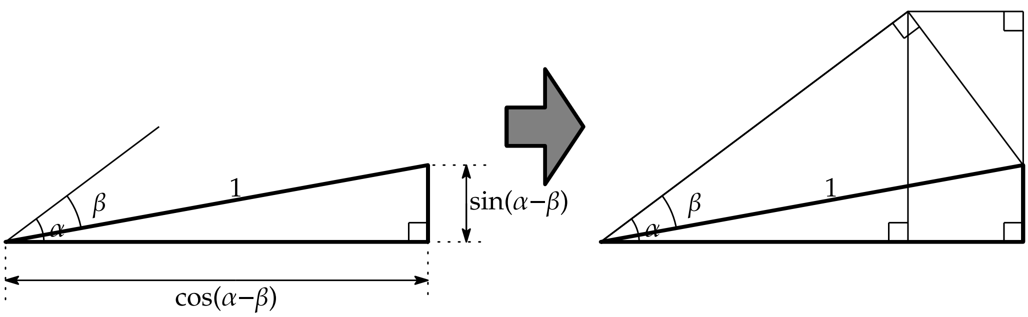


加法定理 [1–b]，[2–b]

加法定理 **[1–b]**　$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

加法定理 **[2–b]**　$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

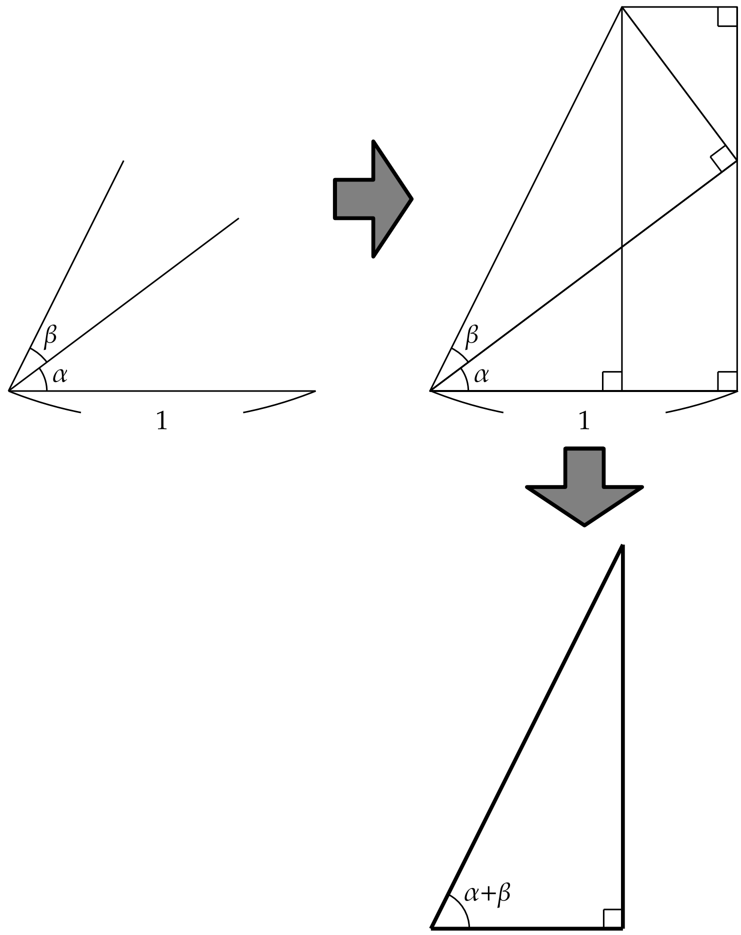
α，β，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



加法定理 **[3–a]**

加法定理 **[3–a]** $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

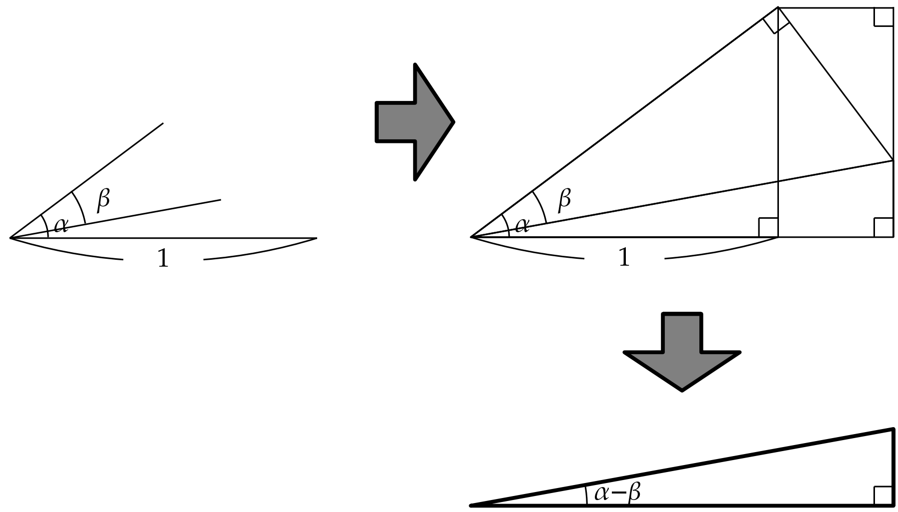
α，β，$\alpha+\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



加法定理 **[3–b]**

加法定理 **[3–b]** $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

α，β，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



2 倍角の公式 [1]，[2] と，半角の公式 [1]，[2]

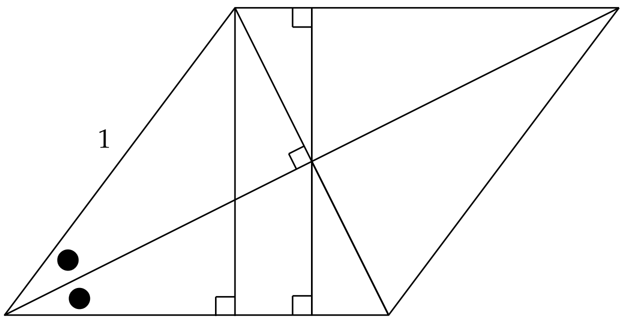
2 倍角の公式 [1]　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

2 倍角の公式 [2]　$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

半角の公式 [1]　$\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$

半角の公式 [2]　$\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$

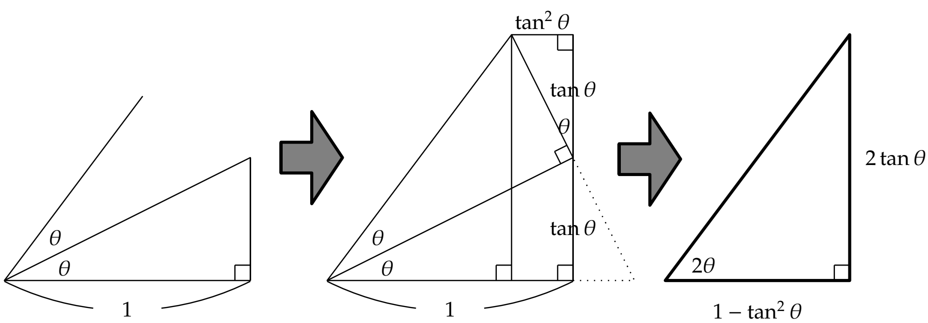
これらは次の図を用いると証明できるが，ここでは詳細は割愛する。（興味のある人は → http://300000.net/ ＞ 研究誌原稿 ＞ 三角関数の諸公式の「図による証明」）



2 倍角の公式 [3]

2 倍角の公式 [3]　$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

2θ が鋭角の場合の，図による証明



三角関数の媒介変数表示

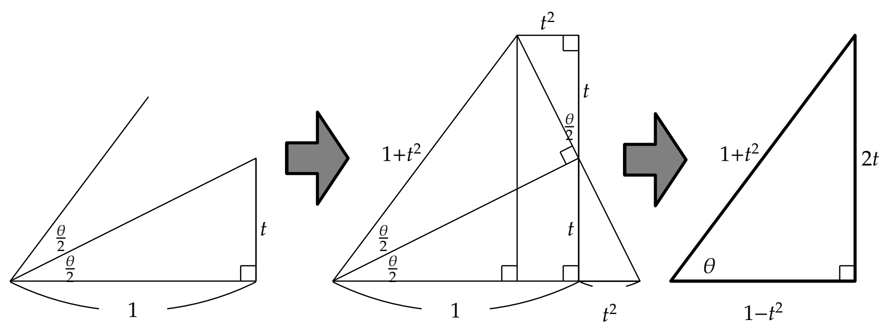
$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とするとき，

媒介変数表示 **[1]** $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$

媒介変数表示 **[2]** $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

媒介変数表示 **[3]** $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$

θ が鋭角の場合の，図による証明



積和の公式

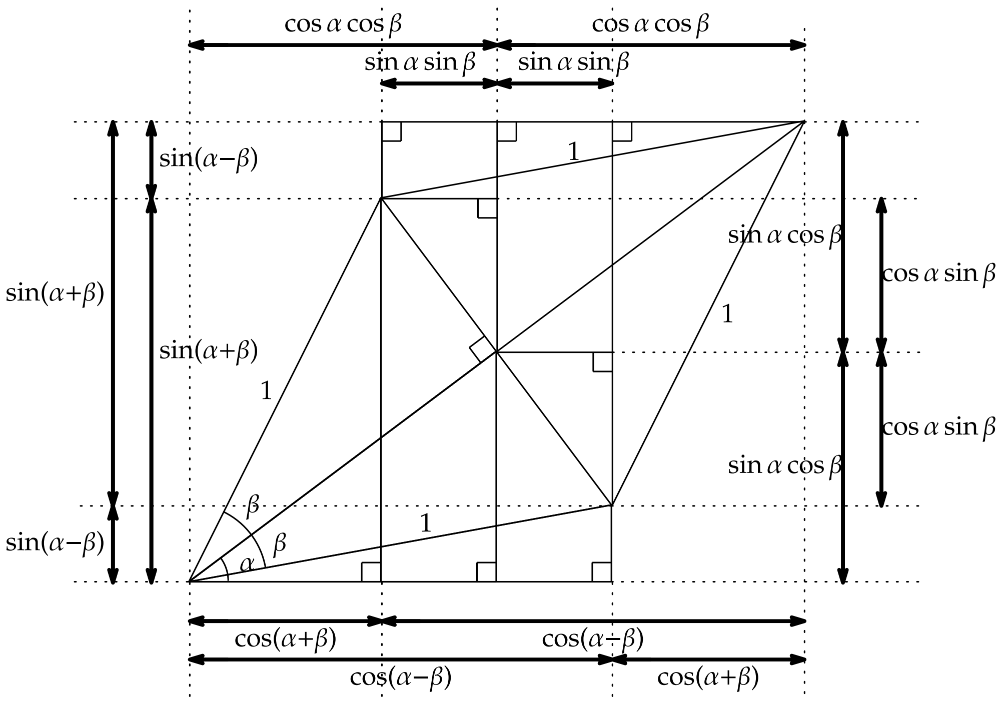
積和の公式 **[1]** $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$

積和の公式 **[2]** $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$

積和の公式 **[3]** $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$

積和の公式 **[4]** $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



和積の公式

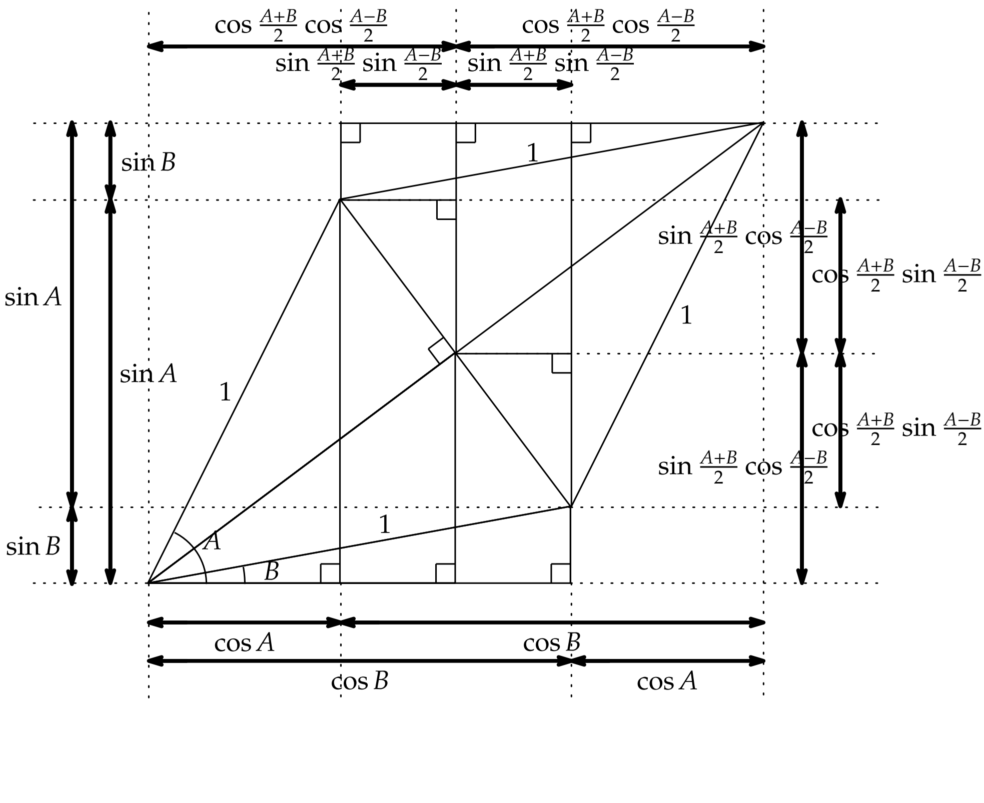
和積の公式 **[1]** $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

和積の公式 **[2]** $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

和積の公式 **[3]** $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

和積の公式 **[4]** $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

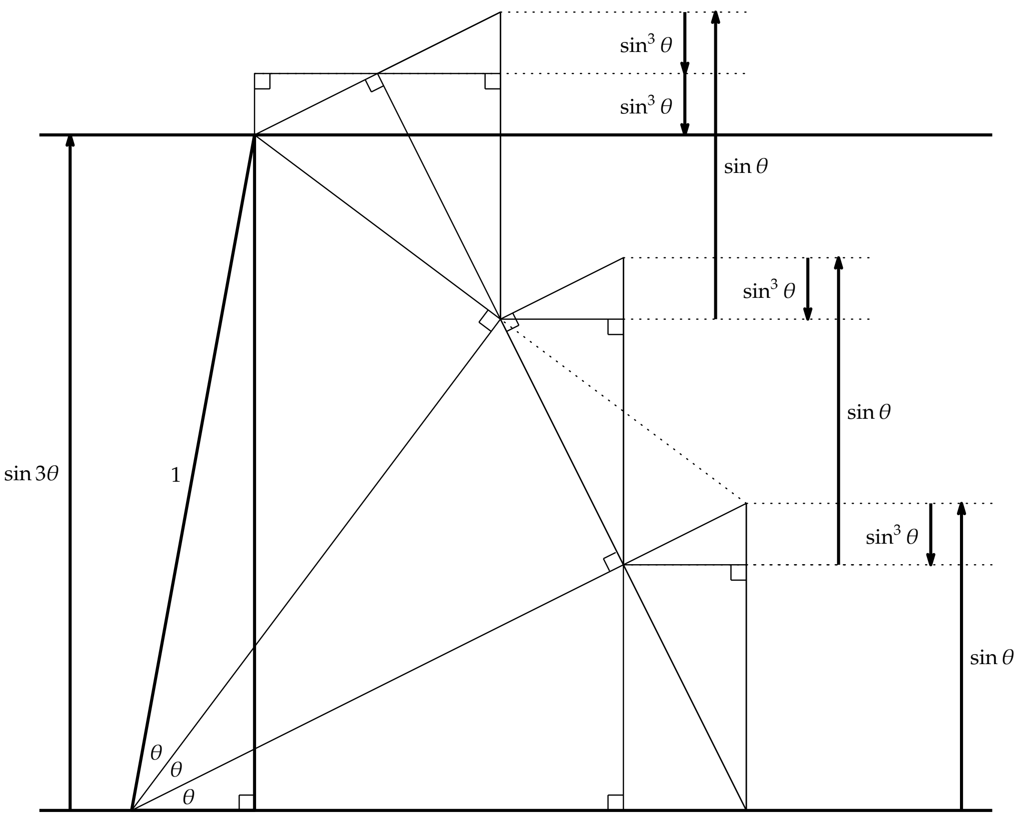
A，B，$\dfrac{A+B}{2}$，$\dfrac{A-B}{2}$ がいずれも鋭角の場合の，図による証明



3 倍角の公式 [1]

3 倍角の公式 [1] $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

3θ が鋭角の場合の，図による証明



3 倍角の公式 [2]

3 倍角の公式 [2]　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

3θ が鋭角の場合の，図による証明