擬似複素数

参拾萬数学工房
(http://www.300000.net/)

はじめに

方程式 $x^2 = -1$ は実数解を持たないが，実数ではない解を持つと仮定して，実数体 $\mathbb{R}$ にそれを添加して得られるのが複素数体 $\mathbb{C}$ である。本稿では，方程式 $x^2 = 1$ が実数解 $x = \pm 1$ 以外の **実数ではない解** も持つと仮定して，実数体 $\mathbb{R}$ にそれを添加して得られる数の集合がどのような性質を持つか考察する。

以下，全ての節において，まず「複素数」についてのよく知られた事実を記してから，それに準じて「擬似複素数」についてわかることを記すことにする。

1　定義

1.1　複素数について

$x^2 = -1$ を満たす数があるとして，その 1 つを i とするとき，$a+ib$（$a, b \in \mathbb{R}$）で表される数を「複素数」と呼ぶ。「複素数」の集合 $\{a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ を，$\mathbb{C}$ と表す。

- 複素数同士の四則演算を次のように定義すると，$\mathbb{C}$ はこの四則演算について閉じている。すなわち，$\mathbb{C}$ は体（可換体）をなす。

  和　$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

  差　$(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$

  積　$(a+ib)(c+id) = ac+ibc+iad+i^2bd = (ac-bd) + i(bc+ad)$

  商　$c+id \neq 0$ のとき
  $$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

- 複素数体 $\mathbb{C}$ は，代数的閉体である。すなわち，一次以上の任意の $\mathbb{C}$ 係数一変数多項式は $\mathbb{C}$ 上に解を持つ(1)。
- 直交座標平面上の点 (a, b) に複素数 $a+ib$ を一対一に対応させるとき，この平面を**複素数平面**（または**ガウス平面**）と呼ぶ。

(1) この事実は，一般に「代数学の基本定理」と呼ばれている。

- 複素数 $z=a+ib$ に対して，$\bar{z}=a-ib$ を z の**共役複素数**という。

1.2　擬似複素数について

方程式 $x^2=1$ が実数解 $x=\pm 1$ 以外の **実数ではない解** も持つと仮定して，その 1 つを k とする[(2)]。このとき，$a+kb$（$a,b\in\mathbb{R}$）で表される数を，本稿では「**擬似複素数**」と呼ぶことにする。

また,「擬似複素数」の集合 $\{a+kb \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ を，本稿では $\mathbb{S}$ で表す[(3)]。

- 擬似複素数同士の和・差・積を次のように定義すると，$\mathbb{S}$ はこれらの演算について閉じている。

  和　$(a+kb)+(c+kd)=(a+c)+k(b+d)$

  差　$(a+kb)-(c+kd)=(a-c)+k(b-d)$

  積　$(a+kb)(c+kd)=ac+kbc+kad+k^2bd=(ac+bd)+k(bc+ad)$

  商　$c^2-d^2\neq 0$ のとき
  $$\frac{a+kb}{c+kd}=\frac{(a+kb)(c-kd)}{(c+kd)(c-kd)}=\frac{(ac-bd)+k(bc-ad)}{c^2-d^2}=\frac{ac-bd}{c^2-d^2}+k\cdot\frac{bc-ad}{c^2-d^2}$$

  $c+kd\neq 0$ であったとしても，$c^2-d^2=0$ の場合には商が定義できない。したがって，**「擬似複素数」の集合 $\mathbb{S}$ は体をなさないが，しかし環（可換環）をなす。**

- 例えば 2 次方程式 $x^2-k=0$ は，$\mathbb{S}$ 内に解を持たない[(4)]。（これは，x^2-k が $\mathbb{S}$ 上で因数分解できないことを意味している。）
  また，例えば 2 次方程式 $x^2-1=0$ は，$x=\pm 1$，$\pm k$ という 4 つの異なる解を持つ[(5)]。（これは，x^2-1 が $\mathbb{S}$ 上で $(x+1)(x-1)$，$(x+k)(x-k)$ の異なる 2 通りに因数分解されることを意味している。）
  以上の例から分かる通り，$\mathbb{S}$ 上の n 次方程式は，解を 1 個も持たない場合もあれば，n 個より多くの解を持つこともある。擬似複素数環 $\mathbb{S}$ はこの意味においても，複素数体 $\mathbb{C}$ のような「よい構造」を持っていない。
- 直交座標平面上の点 (a,b) に擬似複素数 $a+kb$ を一対一に対応させるとき，この平面を**擬似複素数平面**（または**擬似ガウス平面**）と呼ぶことにする。
- 擬似複素数 $w=a+kb$ に対して，$\overline{w}=a-kb$ を w の**共役擬似複素数**と呼ぶことにする。

---

(2) 文字はなんでもよかったので，本稿では k とした。
(3) 文字はなんでもよかったので，本稿では $\mathbb{S}$ とした。
(4) $x=a+kb$ とすると $(a+kb)^2=k$ より $a^2+b^2=0$ かつ $2ab=1$，しかしこの 2 式を同時に満たす $a,b\in\mathbb{R}$ は存在しない。
(5) $x=a+kb$ とすると $(a+kb)^2=1$ より $a^2+b^2=1$ かつ $2ab=0$，したがって $(a,b)=(\pm1,0)$，$(0,\pm1)$

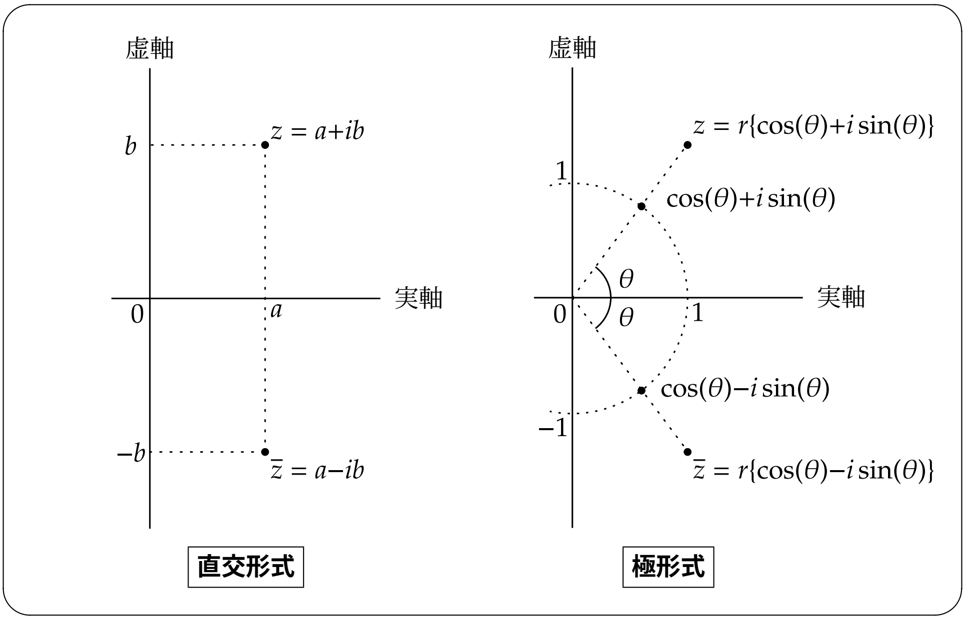
2　極形式

2.1　複素数について

- 複素数 $z = a+ib$ に対して，$\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ を z の**ノルム**（または z の**絶対値**）といい，$|z|$ と書く。
- 複素数 $z = a+ib (\neq 0)$ に対して，$\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$，$\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$ を満たす角 θ を**偏角**といい，$\arg(z)$ と書く。
- 複素数 $z = a+ib$ は，$r = |z|$ と $\theta = \arg(z)$ を用いて

$$z = r \cdot \{\cos(\theta) + i\sin(\theta)\}$$

と書くことができる。この形を，複素数の**極形式**という。（これに対して，$a+ib$ という形は直交形式と呼ぶことがある。）



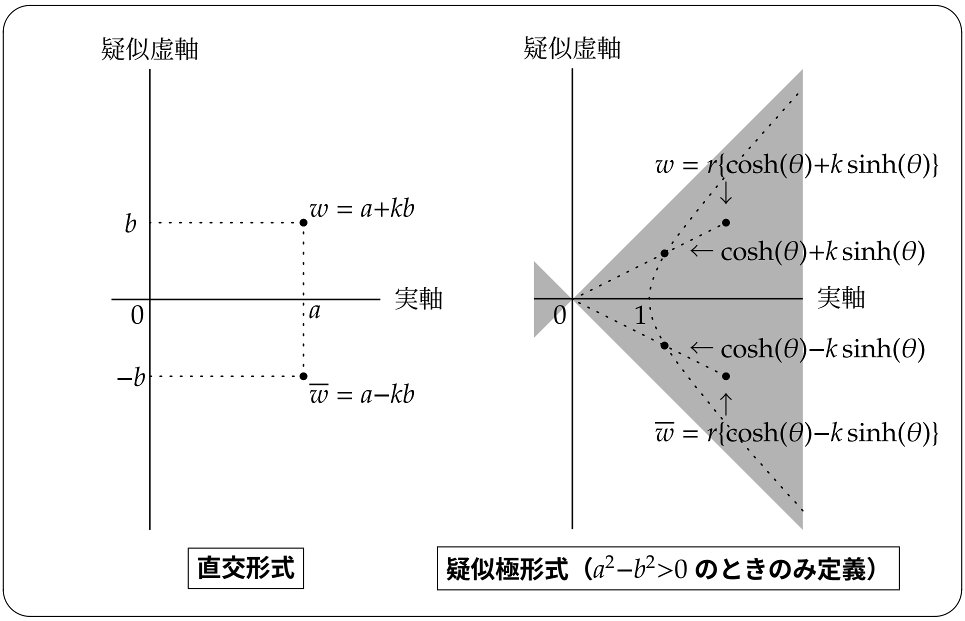
2.2 擬似複素数について

ここでは，$\underline{a^2-b^2>0}$ を満たす擬似複素数 $w=a+kb$ のみを考えることにする[6]。

- 擬似複素数 $w=a{+}kb$（ただし $a^2{-}b^2{>}0$）に対して，$\sqrt{w\cdot\overline{w}}=\sqrt{a^2-b^2}$ を w の**擬似ノルム**[7]と呼び，$\|w\|$ と書くことにする[8]。
- 擬似複素数 $w=a{+}kb$（ただし $a^2{-}b^2{>}0$）に対して，$a>0$ のときは $\cosh(\theta)=\dfrac{a}{\|w\|}$，$\sinh(\theta)=\dfrac{b}{\|w\|}$ を満たすパラメータ θ を，$a<0$ のときは $\cosh(\theta)=-\dfrac{a}{\|w\|}$，$\sinh(\theta)=-\dfrac{b}{\|w\|}$ を満たすパラメータ θ を，それぞれ $\mathbf{arg}(w)$ とする[9]。
- 擬似複素数 $w=a{+}kb$（ただし $a^2{-}b^2{>}0$）は，$r=\|w\|$ と $\theta=\arg(w)$ を用いて

$$a+kb=\pm r\cdot\{\cosh(\theta)+k\sinh(\theta)\}$$

と書くことができる。これらの形を，$a^2{-}b^2>0$ なる擬似複素数の**擬似極形式**と呼ぶことにする。（これに対して，$a{+}kb$ という形は直交形式と呼ぶことにする。）



---

[6] 擬似複素数を考えるときは虚数（2 乗して -1 になる数）は考えないので，$a^2{-}b^2{<}0$ では擬似ノルムが定義できない。また $a^2{-}b^2{=}0$ も，その次の $\arg(w)$ が定義できないので除外する。

[7] 「擬似ノルム」はノルムの公理を満たさないので，**ノルムではない。**

[8] $|w|$ と書くと通常のノルム $\sqrt{a^2+b^2}$ のことと間違えそうなので，本稿では $\|w\|$ と書くことにした。ただし，この表記が一般的というわけではない。

[9] 複素数のときに準じて $\arg(w)$ という記号を採用したが，θ はただのパラメータであり，角度とは関係がない。

3　行列表示

3.1　複素数について

- $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき, $I^2 = -E$ であるから, 集合 $\{aE+bI \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ は複素数体 $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ と通常の和・積によって同型である。
- 行列 $Z = aE+bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の行列式は $a^2 + b^2$ であり，$aE+bI = O$ のとき（すなわち $a = b = 0$ のとき）を除けば正である。
- 行列 $Z = aE+bI$ のうち，行列式が正であるもの全体の集合（すなわち，$aE+bI = O$ を除いた集合）

  $$\{aE+bI \mid aE+bI \neq O\}$$

  は乗法群をなす。このことから，複素数 $a+ib$ のうち，0 を除いたもの全体の集合も乗法群をなすことがわかる。
- 行列 $Z = aE+bI$ のうち，行列式が 1 であるもの全体の集合

  $$\left\{aE+bI \mid a^2+b^2 = 1\right\}$$

  は乗法群をなす。このことから，複素数 $a+ib$ のうち，ノルムが 1 であるもの全体の集合も乗法群をなすことがわかる。
- 複素数 z のノルム $|z|$ と行列 Z の行列式 $|Z|$ の間には

  $$|z| = \sqrt{|Z|}, \qquad |Z| = |z|^2$$

  という関係がある。特に,

  $$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |Z| = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2 = 1$$

  である。
- 行列 $aE+bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の行列式が 1 のとき，すなわち $a^2+b^2 = 1$ のとき，a，b はそれぞれ，パラメータ $\theta(= \arg(a+ib))$ を用いて

  $$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta$$

  と媒介変数表示することができる。

3.2 擬似複素数について

- $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき，$K^2 = E$ であるから，集合 $\{aE + bK \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ は擬似複素数全体のなす環 $\mathbb{S} = \{a + kb \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ と通常の和・積によって同型である。
- 行列 $W = aE + bK = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の行列式は $a^2 - b^2$ であり，必ずしも正とは限らない。
- 行列 $W = aE + bK$ のうち，行列式が正であるもの全体の集合

$$\left\{aE + bI \mid a^2 - b^2 > 0\right\}$$

は乗法群をなす。このことから，擬似複素数 $a + kb$ のうち，擬似ノルムが正であるもの全体の集合も乗法群をなすことがわかる。

- 行列 $W = aE + bK$ のうち，行列式が 1 であるもの全体の集合

$$\left\{aE + bK \mid a^2 - b^2 = 1\right\}$$

は乗法群をなす。このことから，擬似複素数 $a + kb$ のうち，擬似ノルムが 1 であるもの全体の集合も乗法群をなすことがわかる。

- $a^2 - b^2 > 0$ のとき，擬似複素数 w の擬似ノルム $\|w\|$ と行列 W の行列式 $|W|$ の間には

$$\|w\| = \sqrt{|W|}, \qquad |W| = \|w\|^2$$

という関係がある。特に，

$$\|w\| = \|a + kb\| = \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |W| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = 1$$

である。

- 行列 $aE + bK = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の行列式が 1 のとき，すなわち $|aE + bK| = a^2 - b^2 = 1$ のとき，a, b はそれぞれ，パラメータ $\theta (= \arg(a + kb))$ を用いて

$$a = \pm \cosh\theta, \quad b = \pm \sinh\theta$$

と媒介変数表示することができる。

4　初等関数

4.1　複素数について

複素数 $z = a + ib$ に対して，$\exp(z)$，$\cos(z)$，$\sin(z)$，$\cosh(z)$，$\sinh(z)$ を，それぞれ級数を用いて次のように定義する[10]。

公式 1-1：初等複素関数の定義

(1) $\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$
(2) $\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots$
(3) $\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$
(4) $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$
(5) $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$

[公式 1-1]（定義）と $i^2 = -1$ から，即座に次の関係式が導かれる[11]。

公式 1-2：初等複素関数間の関係式

任意の複素数 z に対して

(1) $\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z)$　　$[\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)]$
(2) $\cosh(z) = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$　　$\left[\cosh(iz) = \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\right]$
(3) $\sinh(z) = \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$　　$\left[\sinh(iz) = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2}\right]$
(4) $\cos(z) = \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$　　$\left[\cos(iz) = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}\right]$
(5) $\sin(z) = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$　　$\left[\sin(iz) = \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{-2i}\right]$

(6) $\cosh(iz) = \cos(z)$，$\cos(iz) = \cosh(z)$
(7) $\sinh(iz) = i\sin(z)$，$\sin(iz) = i\sinh(z)$

---

[10] これらの級数はいずれも，任意の複素数 z に対して収束する。その証明は，ダランベールの収束判定法を用いれば容易である。

[11] [公式 1-1] の (1) を前提とするならば，[公式 1-1] の (2)〜(5) の代わりに [公式 1-2] の (2)〜(5) を「定義」として採用することもできる（その場合，[公式 1-1] の (2)〜(5) は「定理」となる）が，本稿では，§4.2 との絡みで，敢えて [公式 1-1] を「定義」として採用している。

次の「加法定理[12]」と「相互関係」は，いずれも [公式 1-1] から直接導かれるが，[公式 1-2] の (1)〜(5) を利用すれば容易に確かめられる。

公式 1-3：初等複素関数の加法定理

任意の複素数 z_1，z_2 に対して

(1) $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$
(2) $\cosh(z_1+z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$
(3) $\sinh(z_1+z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$
(4) $\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$
(5) $\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$

公式 1-4：初等複素関数の相互関係

任意の複素数 z に対して

(1) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
(2) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

ところで，$z \in \mathbb{C}$ に対して $z = x + iy$（$x, y \in \mathbb{R}$）とするとき，$\exp(x+iy)$，$\cos(x+iy)$，$\sin(x+iy)$，$\cosh(x+iy)$，$\sinh(x+iy)$ はそれぞれ次のようになる。

公式 1-5：初等複素関数の実関数表示

(1) $\exp(x+iy) = \exp(x)\{\cos(y) + i\cdot\sin(y)\}$
(2) $\cosh(x+iy) = \cosh(x)\cos(y) + i\cdot\sinh(x)\sin(y)$
(3) $\sinh(x+iy) = \sinh(x)\cos(y) + i\cdot\cosh(x)\sin(y)$
(4) $\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\cdot\sin(x)\sinh(y)$
(5) $\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cdot\cos(x)\sinh(y)$

[公式 1-5] は，[公式 1-3] の特別な場合（$z_1 = x$，$z_2 = iy$ の場合）に過ぎないが，右辺で用いている関数はすべて（複素関数ではなく）「実関数」であることを注意しておく。すなわち，これらの初等複素関数はすべて，ある実関数 $f(x, y)$，$g(x, y)$ を用いて

$$f(x, y) + i\cdot g(x, y)$$

の形で表記できているのである。

[12] [公式 1-3] の (1) は一般には「指数法則」と呼ばれるが，その形式から，ここでは「加法定理」と分類した。

4.2　擬似複素数について

$\underline{a^2-b^2>0}$ を満たす擬似複素数 $w=a+kb$ に対して，$\exp(w)$，$\cos(w)$，$\sin(w)$，$\cosh(w)$，$\sinh(w)$ を，それぞれ級数を用いて次のように定義する[13]。

公式 2-1：初等擬似複素関数の定義

(1) $\exp(w)=1+w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\frac{w^4}{4!}+\frac{w^5}{5!}+\frac{w^6}{6!}+\frac{w^7}{7!}+\cdots$

(2) $\cosh(w)=1+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}+\frac{w^6}{6!}+\cdots$

(3) $\sinh(w)=w+\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\frac{w^7}{7!}+\cdots$

(4) $\cos(w)=1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\frac{w^6}{6!}+\cdots$

(5) $\sin(w)=w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\frac{w^7}{7!}+\cdots$

これらの級数はいずれも，任意の擬似複素数 w に対して収束するが，それは証明を要する事柄である[14]。

---

(13) §4.1 で，[公式 1-1] の (1) を前提とするならば，複素関数 $\cos z$，$\sin z$ を

- $\cos(z)=\dfrac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$
- $\sin(z)=\dfrac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$

と定義することも可能であることを指摘した。これに準じて，擬似複素関数 $\cos(w)$，$\sin(w)$ を，[公式 2-1] の (4)〜(5) の代わりにそれぞれ

- $\cos(w)=\dfrac{\exp(kw)+\exp(-kw)}{2}$
- $\sin(w)=\dfrac{\exp(kw)-\exp(-kw)}{2k}$

と定義するとどうなるかを見ておこう。

[公式 2-1] の (1) を前提とするとき，

- $\cos(w)=1+\dfrac{w^2}{2!}+\dfrac{w^4}{4!}+\dfrac{w^6}{6!}+\cdots$
- $\sin(w)=w+\dfrac{w^3}{3!}+\dfrac{w^5}{5!}+\dfrac{w^7}{7!}+\cdots$

となる。しかし，これらの右辺は実関数からの拡張になっていない。

すなわち，$\cos(w)$，$\sin(w)$ をこのように定義することは不適切なのである。

(14) 複素関数のときにダランベールの収束判定法を用いて証明を行う際，その証明には複素数の特性は「複素数のノルム」のみ用いる。したがって，擬似複素関数のときも，「擬似複素数の擬似ノルム」を用いて，まったく同様の証明ができる。

[公式 2-1]（定義）と $k^2=1$ から，即座に次の関係式が導かれる。

公式 2-2：初等擬似複素関数間の関係式

任意の擬似複素数 w に対して

(1) $\exp(w)=\cosh(w)+\sinh(w)$　　$[\exp(kw)=\cosh(w)+k\sinh(w)]$

(2) $\cosh(w)=\dfrac{\exp(w)+\exp(-w)}{2}$　　$[\cosh(kw)=\cosh(w)]$

(3) $\sinh(w)=\dfrac{\exp(w)-\exp(-w)}{2}$　　$[\sinh(kw)=k\sinh(w)]$

複素関数においては，三角関数 $\cos(z)$，$\sin(z)$ が重要な役割を果たした。しかし擬似複素関数においては，$\cos(w)$，$\sin(w)$ と $\exp(w)$，$\sinh(w)$，$\cosh(w)$ との相性はまったくよくない。その代わり，$\exp(w)$，$\sinh(w)$，$\cosh(w)$ の 3 者の相性は，複素関数のときよりもずっとよい。

このあと詳述するが，実は，擬似複素関数においては双曲線関数 $\cosh(w)$，$\sinh(w)$ が重要な役割を果たすのである。

ここから先は，$\exp(w)$，$\sinh(w)$，$\cosh(w)$ に的を絞って論を進めることにする。

次の「加法定理」と「相互関係」は，いずれも [公式 2-1] から直接導かれるが，[公式 2-2] の (1)～(3) を利用すれば容易に確かめられる。

公式 2-3：初等擬似複素関数の加法定理

任意の擬似複素数 w_1，w_2 に対して

(1) $\exp(w_1+w_2)=\exp(w_1)\exp(w_2)$

(2) $\cosh(w_1+w_2)=\cosh(w_1)\cosh(w_2)+\sinh(w_1)\sinh(w_2)$

(3) $\sinh(w_1+w_2)=\sinh(w_1)\cosh(w_2)+\cosh(w_1)\sinh(w_2)$

公式 2-4：初等擬似複素関数の相互関係

任意の擬似複素数 w に対して

(1) $\cosh^2(w)-\sinh^2(w)=1$

ところで，$w \in \mathbb{S}$ に対して $w = x + ky$（$x, y \in \mathbb{R}$）とするとき，$\exp(x{+}ky)$，$\cosh(x{+}ky)$，$\sinh(x{+}ky)$ はそれぞれ次のようになる。

公式 2-5：初等擬似複素関数の実関数表示

(1) $\exp(x{+}ky) = \exp(x)\{\cosh(y) + k \cdot \sinh(y)\}$

(2) $\cosh(x{+}ky) = \cosh(x)\cosh(y) + k \cdot \sinh(x)\sinh(y)$

(3) $\sinh(x{+}ky) = \sinh(x)\cosh(y) + k \cdot \cosh(x)\sinh(y)$

[公式 2-5] は，[公式 2-3] の特別な場合（$w_1 = x$，$w_2 = ky$ の場合）に過ぎないが，右辺で用いている関数はすべて（擬似複素関数ではなく）「実関数」であることを注意しておく。すなわち，これらの初等擬似複素関数はすべて，ある実関数 $f(x, y)$，$g(x, y)$ を用いて

$$f(x, y) + k \cdot g(x, y)$$

の形で表記できているのである。

5　オイラーの公式とド・モアブルの定理

5.1　複素数について

[公式 1-5] の (1) において，$x = 0$ の場合，すなわち $\exp(z)$ の z が純虚数である場合を，特に「オイラーの公式」という。

公式 1-6：オイラーの公式

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

この右辺は，$|z| = 1$ を満たす複素数 z の極形式である。すなわち，$|z| = 1$ を満たす複素数は，偏角 $\theta = \arg(z)$ を用いて指数関数 $\exp(i\theta)$ と書ける。

特に，[公式 1-3] の (1) から

$$\exp(i\theta_1) \cdot \exp(i\theta_2) = \exp(i(\theta_1+\theta_2))$$

が導かれることは重要である。これを極形式表示に戻せば

$$\{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)\} \cdot \{\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)\} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

となる。

一般に，極形式 $r\{\cos(\theta)+i\sin(\theta)\}$ は，[公式 1-6]（オイラーの公式）を用いると

$$r\{\cos(\theta)+i\sin(\theta)\} = r\exp(i\theta)$$

と書き換えられる。したがって，極形式表示された 2 つの複素数の積は，次のようになる；

公式 1-7：極形式表示された複素数の積

$z_1 = r_1\{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)\}$，$z_2 = r_2\{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)\}$ に対して，

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)\} \cdot r_2\{\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

次に，$|z| = 1$ を満たす複素数 $z = \exp(i\theta)$ の冪を考えよう。

[公式 1-7] において $r_1=r_2=1$，$\theta_1=\theta_2=\theta$ とすると，次の式が得られる；

$$\{\cos(\theta)+i\sin(\theta)\}^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

さらに 3 乗，4 乗，……と続けていくと，次の「ド・モアブルの定理」が得られる；

公式 1-8：ド・モアブルの定理

n を自然数とするとき，

$$\{\cos(\theta)+i\sin(\theta)\}^n = \{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\}$$

実際には，n が負の整数であったとしてもド・モアブルの定理は成り立つが，ここでは割愛する。

5.2　擬似複素数について

[公式 2-5] の (1) において，$x = 0$ の場合は，「擬似オイラーの公式」と言えるであろう。

公式 2-6：擬似オイラーの公式

$$\exp(k\theta) = \cosh(\theta) + k\sinh(\theta)$$

この右辺は，$\|w\| = 1$ を満たす擬似複素数 w の擬似極形式である。すなわち，$\|w\| = 1$ を満たす擬似複素数は，パラメータ $\theta = \arg(w)$ を用いて指数関数 $\exp(k\theta)$ または $-\exp(k\theta)$ と書ける。

特に，[公式 2-3] の (1) から

$$\exp(k\theta_1)\cdot\exp(k\theta_2) = \exp(k(\theta_1+\theta_2))$$

が導かれることは重要である。これを極形式表示に戻せば

$$\{\cosh(\theta_1)+k\sinh(\theta_1)\}\cdot\{\cosh(\theta_2)+k\sinh(\theta_2)\} = \cosh(\theta_1+\theta_2) + k\sinh(\theta_1+\theta_2)$$

となる。

一般に，極形式 $r\{\cosh(\theta)+k\sinh(\theta)\}$ は，[公式 2-6]（オイラーの公式）を用いると

$$r\{\cosh(\theta)+k\sinh(\theta)\} = r\exp(k\theta)$$

と書き換えられる。したがって，擬似極形式表示された 2 つの擬似複素数の積は，次のようになる；

公式 2-7：擬似極形式表示された擬似複素数の積

$w_1 = r_1\{\cosh(\theta_1)+k\sinh(\theta_1)\}$，$w_2 = r_2\{\cosh(\theta_2)+k\sinh(\theta_2)\}$ に対して，

$$\begin{aligned} w_1\cdot w_2 &= r_1\{\cosh(\theta_1)+k\sinh(\theta_1)\}\cdot r_2\{\cosh(\theta_2)+k\sinh(\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{\cosh(\theta_1+\theta_2) + k\sinh(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

次に，$\|w\| = 1$ を満たす擬似複素数 $w = \exp(k\theta)$ の冪を考えよう。

[公式 2-7] において $r_1=r_2=1$，$\theta_1=\theta_2=\theta$ とすると，次の式が得られる；

$$\{\cosh(\theta)+k\sinh(\theta)\}^2 = \cosh(2\theta) + k\sinh(2\theta)$$

さらに 3 乗，4 乗，……と続けていくと，次の「擬似ド・モアブルの定理」が得られる；

公式 2-8：擬似ド・モアブルの定理

n を自然数とするとき,

$$\{\cosh(\theta)+k\sinh(\theta)\}^n = \{\cosh(n\theta) + k\sinh(n\theta)\}$$

実際には，n が負の整数であったとしても擬似ド・モアブルの定理は成り立つが，ここでは割愛する。

あとがき

私は今回，そもそもは「四元数」について考察しようと思っていたのだが，四元数の行列表示（4 次正方行列による表示）を考えているときに，ふと，

「複素数の行列表示において，$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の代わりに $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考えるとどうなるか？」

と気になり，言わば横道にそれるような形で「擬似複素数」の考察を始めた。

すぐに，集合 $\{aE+bK\}$ は集合 $\{aE+bI\}$ のような体ではないことはわかった。普通ならその時点で考察が終わるのだろうが，偶然にも，ひょんなことからこれが双曲線関数と相性がよいということに気付き，「考察する価値のある対象」と認識するようになった。

私は相対性理論についての豊富な知識を持っていないのでまだ十分な考察ができていないのだが，集合 $\{a+kb \mid a^2-b^2>0\}$ は，時間を 1 次元，空間を 1 次元とする「2 次元のミンコフスキー時空間」をなしていると言えそうである。また，擬似ノルム $\sqrt{a^2-b^2}$ は，相対性理論におけるローレンツ短縮 $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ と何らかの形で関係があると思われる。

「複素数」を拡張した「四元数」によって 4 次元のミンコフスキー時空間を表現できるように，「擬似複素数」を拡張した「擬似四元数」によって 4 次元のミンコフスキー時空間を表現することも可能なのだろうか？

まずは相対性理論を勉強し直した上で，改めて考察したい。

参考文献

特になし。