内心と傍心の軌跡

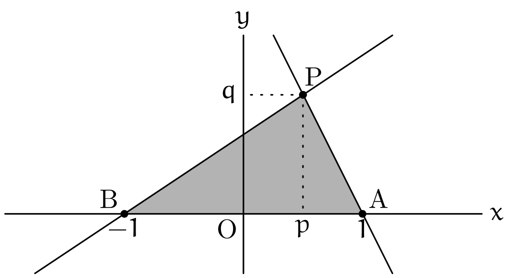
参拾萬数学工房

（ http://www.geocities.jp/osaqmath/ ）

2 定点 A，B と動点 P によって作られる △PAB の **内心** および **傍心** の軌跡について考察する。このときのポイントは，**内心** と **傍心** の計 4 点を同時に考察するところにある。

§ 0.　準備

A$(1, 0)$，B$(-1,\ 0)$ となるようにデカルト座標を導入する。また，動点 P の座標を，媒介変数 p，q を用いて $(p,\ q)$ とする。



3 点 A，B，P が △PAB を作るための必要十分条件は $q \neq 0$ であるから，以下では $q \neq 0$ の場合のみ考えることにする。このとき，直線 PA，直線 PB，直線 AB の方程式は，媒介変数 p，q を用いてそれぞれ次のように表される；

$$
\begin{aligned}
\text{直線 PA：}\quad & x - \frac{p-1}{q}y - 1 = 0 \\
\text{直線 PB：}\quad & x - \frac{p+1}{q}y + 1 = 0 \\
\text{直線 AB：}\quad & y = 0
\end{aligned}
$$

内心および傍心は，

- 直線 PA と直線 AB のなす角を 2 等分する直線（2 本ある）
- 直線 PB と直線 AB のなす角を 2 等分する直線（2 本ある）

の交点（計 4 個）である。なお，

- 直線 PA と直線 PB のなす角を 2 等分する直線（2 本ある）

も内心および傍心を通るが，本稿ではこれは使わずに計算する。

[1] まず，直線 PA と直線 AB のなす角を 2 等分する直線（2 本ある）を求める。この直線上の点を Q(x, y) とすれば，「点 Q と直線 PA との距離」と「点 Q と直線 AB との距離」は等しいので

$$\frac{\left|x-\frac{p-1}{q}y-1\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{p-1}{q}\right)^2}}=|y|$$

これを整理すると

$$\boxed{(x-1)^2-\frac{2(p-1)}{q}(x-1)y-y^2=0 \qquad \text{[a]}}$$

となる。これは一見すると「2 次曲線（円錐曲線)」の方程式のように見えるが，左辺は実数の範囲で因数分解できるので，実際には 2 直線

$$x+\frac{\sqrt{p^2-2p+1+q^2}-p+1}{q}y-1=0 \qquad \textbf{[a-1]}$$

$$x-\frac{\sqrt{p^2-2p+1+q^2}+p-1}{q}y-1=0 \qquad \textbf{[a-2]}$$

を表しているに過ぎない。

[2] [1] と同様の方法で，直線 PB と直線 AB のなす角を 2 等分する直線（2 本ある）も求める。この直線上の点を Q(x, y) とすれば，「点 Q と直線 PB との距離」と「点 Q と直線 AB との距離」は等しいので

$$\frac{\left|x-\frac{p+1}{q}y+1\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{p+1}{q}\right)^2}}=|y|$$

これを整理すると

$$\boxed{(x+1)^2-\frac{2(p+1)}{q}(x+1)y-y^2=0 \qquad \text{[b]}}$$

となる。これは，2 直線

$$x-\frac{\sqrt{p^2+2p+1+q^2}+p+1}{q}y+1=0 \qquad \textbf{[b-1]}$$

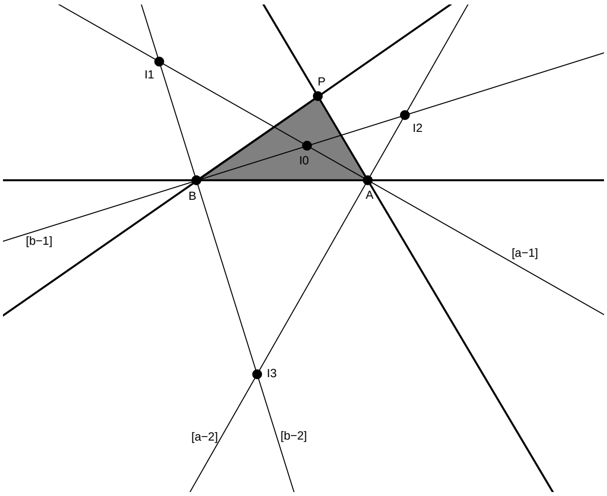
$$x+\frac{\sqrt{p^2+2p+1+q^2}-p-1}{q}y+1=0 \qquad \textbf{[b-2]}$$

を表している。

このとき，

- 内心は「**[a-1]** と **[b-1]** との交点」である（以下 I_0 とする）
- 傍心は「**[a-1]** と **[b-2]** との交点」，「**[a-2]** と **[b-1]** との交点」，「**[a-2]** と **[b-2]** との交点」の 3 つである（以下，順に I_1，I_2，I_3 とする）

ということがわかる（次の図を参照）。



すなわち，**[a-1]** と **[b-1]** を連立して解けば I_0 の座標が求まり，**[a-1]** と **[b-2]** を連立して解けば I_1 の座標が求まり，……というように，内心や傍心の座標をすべて求めることができる。しかし，I_0〜I_3 は代数曲線 **[a]**，**[b]** の共有点であるから，もっと端的に

[a] と [b] を連立して解けば，I_0〜I_3 という 4 点の座標が求まる

と言えるのである。

§ 1. 動点 P が「辺 AB に平行な直線上」を動くとき

本節では，**q を定数として，動点 P が直線 $y=q$ 上を動く場合** を考える。ただし，3 点 P，A，B が三角形を作るために，**定数 q は 0 ではない** と仮定しておく。このときの I_0〜I_3 の軌跡を求めるには，前述の 2 式

$$(x-1)^2-\frac{2(p-1)}{q}(x-1)y-y^2=0 \qquad [a]$$

$$(x+1)^2-\frac{2(p+1)}{q}(x+1)y-y^2=0 \qquad [b]$$

を連立して p を消去すればよく，それを行うと

$$\boxed{q(x^2+y^2-1)-2x^2y+2y=0}$$

という 3 次式が得られる。これが, 動点 P が直線 $y=q$（ただし q は 0 でない定数）上を動くときの「**△PAB の内心と傍心の軌跡の方程式**」である。

ところで，動点 P が直線 $y=q$（ただし q は 0 でない定数）上を動くときの「△PAB の内心と傍心の軌跡」は，「**楕円曲線**」である。それを確認しよう。

上の式に

$$x=\frac{-qY}{2X}\ ,\quad y=\frac{q(X+1)}{2X}$$

を代入して整理すれば

$$\boxed{Y^2=X^3+\frac{2q^2+4}{q^2}X^2+X}$$

となる。また，これに

$$X=\frac{q}{2y-q}\ ,\quad Y=\frac{-2x}{2y-q}$$

を代入すれば元に戻る。したがって，この 2 つの曲線は **双有理同値** である。

また，$Y^2=X^3+\frac{2q^2+4}{q^2}X^2+X$（ただし q は 0 でない定数）の右辺（3 次式）の判別式を D とするとき，定数 q の値によらず $D\neq 0$ であることも容易にわかる。

以上により，動点 P が直線 $y=q$（ただし q は 0 でない定数）上を動くときの「△PAB の内心と傍心の軌跡」は「**楕円曲線**」であることが確かめられた。

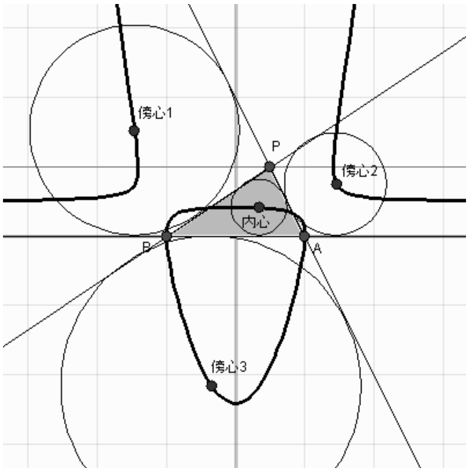
以下に，「$q=1$ のとき」，「$q=2$ のとき」という 2 つの場合の図をあげておく。

例 1–1　**動点 P が直線 $y=1$ 上を動くとき（すなわち $q=1$ のとき）**

このとき，△PAB の内心と傍心の軌跡の方程式は

$$\boxed{x^2+y^2-1-2x^2y+2y=0}$$

となる。これは「**楕円曲線**」である。

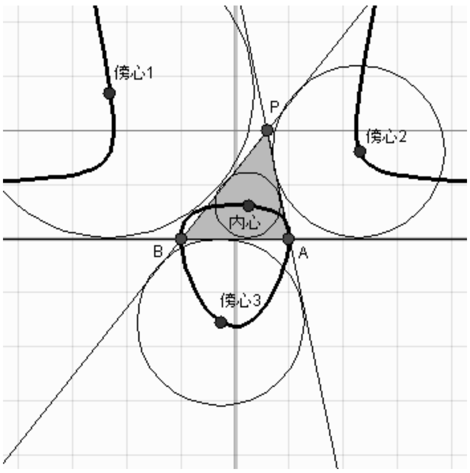


例 1–2　**動点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき（すなわち $q=2$ のとき）**

このとき，△PAB の内心と傍心の軌跡の方程式は

$$\boxed{x^2+y^2-1-x^2y+y=0}$$

となる。これは「**楕円曲線**」である。



§ 2.　動点 P が「辺 AB に垂直な直線上」を動くとき

本節では **p を定数として，動点 P が直線 $x = p$ 上を動く場合** を考える。このときの I_0〜I_3 の軌跡を求めるには，前述の 2 式

$$(x-1)^2 - \frac{2(p-1)}{q}(x-1)y - y^2 = 0 \qquad [a]$$

$$(x+1)^2 - \frac{2(p+1)}{q}(x+1)y - y^2 = 0 \qquad [b]$$

を連立して q を消去すればよく，それを行うと

$$\boxed{p(x^2 + y^2 - 1) - x^3 + xy^2 + x = 0}$$

という 3 次式が得られる。これが，動点 P が直線 $x = p$ 上を動くときの「**△PAB の内心と傍心の軌跡の方程式**」である。

上の式に

$$x = \frac{1}{X} - p\ ,\quad y = \frac{Y}{X}$$

を代入して整理すれば

$$\boxed{Y^2 = -2p(p+1)(p-1)X^3 + (5p^2-1)X^2 - 4pX + 1}$$

となる。また，これに

$$X = \frac{1}{x+p}\ ,\quad Y = \frac{y}{x+p}$$

を代入すれば元に戻る。したがって，この 2 つの曲線は **双有理同値** である。

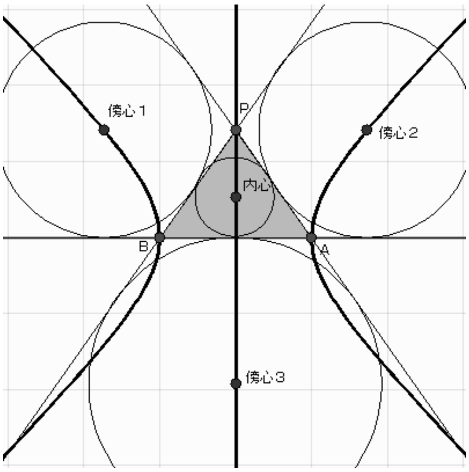
- **$p = 0,\ \pm 1$ のとき**，$Y^2 = -2p(p+1)(p-1)X^3 + (5p^2-1)X^2 - 4pX + 1$ の右辺が 2 次式となるので，**これは「楕円曲線」ではない**。
- **$p \neq 0,\ \pm 1$ のとき**，$Y^2 = -2p(p+1)(p-1)X^3 + (5p^2-1)X^2 - 4pX + 1$ の右辺（3 次式）の判別式を D とすると，（計算がかなり大変だが）$D \neq 0$ となることがわかるので，**これは「楕円曲線」である**。

以下に，「$p = 0$ のとき」，「$p = \frac{1}{2}$ のとき」，「$p = 1$ のとき」，「$p = 2$ のとき」という 4 つの場合の図をあげておく。

例 2–1　**動点 P が直線 $x = 0$ 上を動くとき（すなわち $p = 0$ のとき）**

点 P が直線 $x = 0$ を動くとき，△PAB は PA = PB の二等辺三角形である。

このとき，△PAB の内心と傍心の軌跡は $\boxed{-x^3 + xy^2 + x = 0}$ ，すなわち**「直線 $x = 0$」および「双曲線 $x^2 - y^2 = 1$」**である。

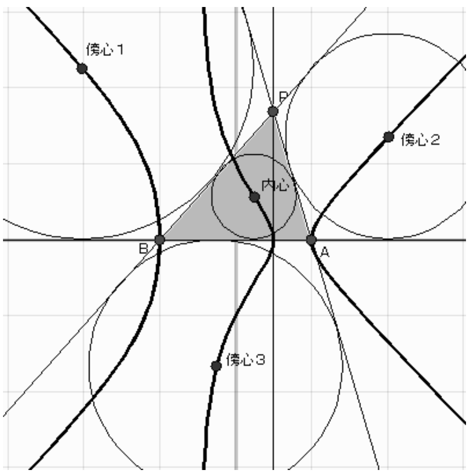


例 2–2　**動点 P が直線 $x = \frac{1}{2}$ 上を動くとき（すなわち $p = \frac{1}{2}$ のとき）**

このとき，△PAB の内心と傍心の軌跡の方程式は

$$\boxed{x^2 + y^2 - 1 - 2x^3 + 2xy^2 + 2x = 0}$$

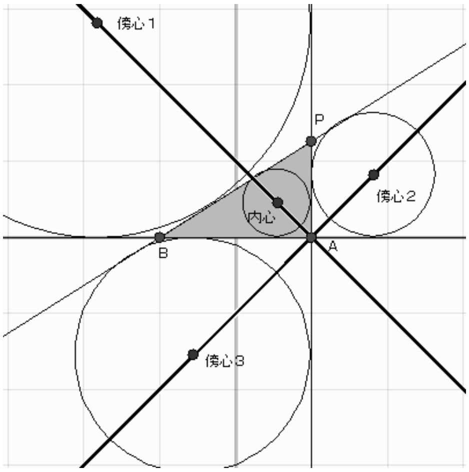
となる。これは「**楕円曲線**」である。



例 2–3　**動点 P が直線 $x = 1$ 上を動くとき（すなわち $p = 1$ のとき）**

点 P が直線 $x = 1$ を動くとき，△PAB は ∠PAB = 90° の直角三角形である。

このとき，△PAB の内心と傍心の軌跡は **2 直線 $x+y-1 = 0$，$x-y-1 = 0$** である。
（これは $\boxed{x^2 + y^2 - 1 - x^3 + xy^2 + x = 0}$ の部分集合である。）

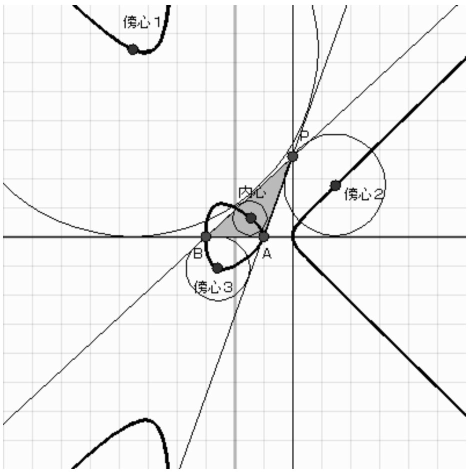


例 2–4　**動点 P が直線 $x = 2$ 上を動くとき（すなわち $p = 2$ のとき）**

このとき，△PAB の内心と傍心の軌跡の方程式は

$$\boxed{2x^2 + 2y^2 - 2 - x^3 + xy^2 + x = 0}$$

となる。これは「**楕円曲線**」である。



§ 3. 動点 P が「辺 AB の中点を通る直線上」を動くとき

「辺 AB の中点」は原点 O なので，要は「原点 O を通る直線」である。

「辺 AB の中点を通る直線」が AB に一致する場合は，△PAB が作られないので考察の対象外とする。また，「辺 AB の中点を通る直線」が AB に垂直な場合は，§ 2 で既に考察済みである。

したがって，ここで考察の対象とするのは，定数 a を用いて $y = ax$ （ただし $a \neq 0$）と表すことができる直線である。

点 P が直線 $y = ax$ 上にあるとき，p と q には

$$q = ap$$

という関係式が成り立つ。したがって，このときの I_0〜I_3 の軌跡を求めるには，前述の 2 式

$$(x-1)^2 - \frac{2(p-1)}{q}(x-1)y - y^2 = 0 \qquad [a]$$

$$(x+1)^2 - \frac{2(p+1)}{q}(x+1)y - y^2 = 0 \qquad [b]$$

に $q = ap$ を代入してからこれらを連立して p を消去すればよく，それを行うと

$$\boxed{a(x^3 - xy^2 - x) - 2x^2y + 2y = 0}$$

という 3 次式が得られる。これが，動点 P が直線 $y = ax$ 上を動くときの「**△PAB の内心と傍心の軌跡の方程式**」である。

上の式に

$$x = \frac{2X}{aY}, \quad y = \frac{X+1}{Y}$$

を代入して整理すれば

$$\boxed{Y^2 = X^3 + \frac{2a^2+4}{a^2}X^2 + X}$$

となる。また，これに

$$X = \frac{ax}{2y - ax}, \quad Y = \frac{-2}{2y - ax}$$

を代入すれば元に戻る。したがって，この 2 つの曲線は **双有理同値** である。

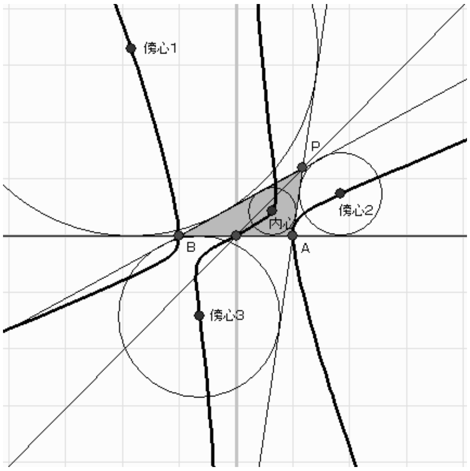
また，$Y^2 = X^3 + \frac{2a^2+4}{a^2}X^2 + X$（ただし a は 0 でない定数）の右辺（3 次式）の判別式を D とするとき，定数 a の値によらず $D \neq 0$ であることも容易にわかる。

以上により，動点 P が直線 $y = ax$（ただし a は 0 でない定数）上を動くときの「△PAB の内心と傍心の軌跡」は「**楕円曲線**」であることが確かめられた。

以下に，「$a = 1$ のとき」，「$a = 2$ のとき」という 2 つの場合の図をあげておく。

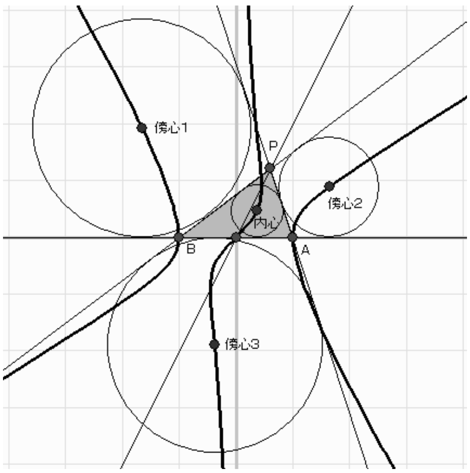
例 3–1　**動点 P が直線 $y = x$ 上を動くとき（すなわち $a = 1$ のとき）**

軌跡の方程式は $\boxed{x^3 - xy^2 - x - 2x^2y + 2y = 0}$ で，これは「**楕円曲線**」である。



例 3–2　**動点 P が直線 $y = 2x$ 上を動くとき（すなわち $a = 2$ のとき）**

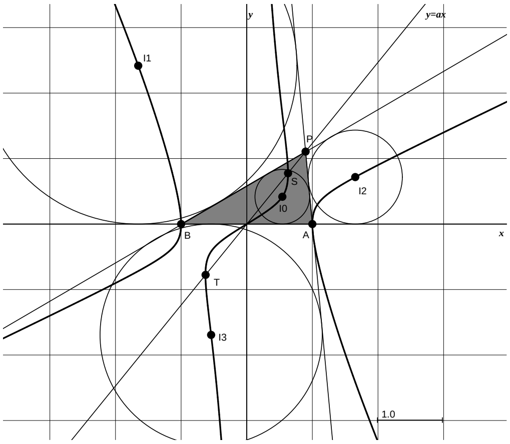
軌跡の方程式は $\boxed{x^3 - xy^2 - x - x^2y + y = 0}$ で，これは「**楕円曲線**」である。



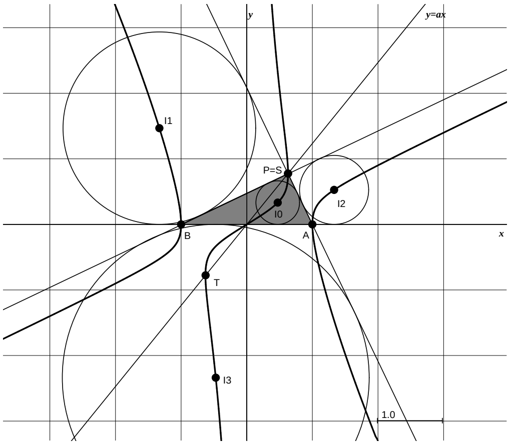
本節（§ 3.）のここから先は，入稿の直前（2 日前）に突然閃いたことを，慌てて書き記したものである（つまり，当初の予定にはなかった原稿である）。まだ計算による検証が済んでいないが，パソコンの画面上で見る限り，まず間違いないと思われるので，ここに掲載することにした。

以下では，「**楕円曲線の群構造**」は既知のものとする。

本節（§ 3.）における内心と傍心の軌跡の楕円曲線（以下 $\mathcal{E}$ とする）と直線 $y = ax$ は，原点 O 以外に 2 点で交わるので，その 2 点の一方を S，他方を T とする。



そして，動点 P がちょうど点 S と一致するときを考える。



このとき，なんと，**4 点 $\mathbf{I}_0$，$\mathbf{I}_1$，$\mathbf{I}_2$，$\mathbf{I}_3$ は「クラインの 4 元群」を構成するのである！**

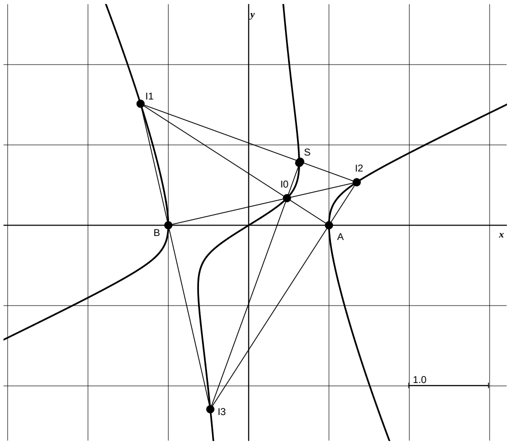
では，このことを，図を利用して確認してみよう。

ここで，A，B，I_0，I_1，I_2，I_3，S，T はすべて楕円曲線 $\mathcal{E}$ 上の点であることに注意しておく。

今は点 P が点 S に一致するときを考えるので，以下ではその点を（P ではなく）S と呼ぶことにする。したがって，これまで △PAB と呼んでいた三角形は △SAB となるが，今まで同様，△SAB の内心を I_0，傍心をそれぞれ I_1，I_2，I_3 と表す。

以下では，図を少しでも見やすくするために，△SAB 及びその内接円・外接円などは消去し，楕円曲線 $\mathcal{E}$ 及びその上の点 A，B，I_0，I_1，I_2，I_3，S，T のみ表示する。

I_0 と I_1 と A，I_0 と I_2 と B，I_0 と I_3 と S，I_1 と I_2 と S，I_2 と I_3 と A，I_3 と I_1 と B がそれぞれ一直線上にあることは，内心・傍心の定義から明らかである。（下図を参照。）



したがって，例えば I_0 を群の単位元とみなせば，この図から次の演算結果が得られる；

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_3\ ,\quad \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_1\ ,\quad \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2$$

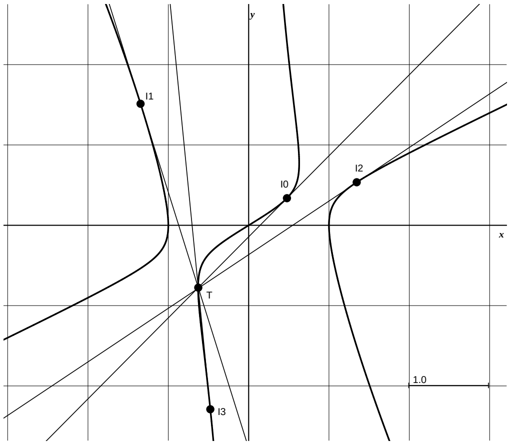
（このとき，当然 $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_1$，$\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_2$，$\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_3$ である。）

次に，$2\mathrm{I}_1(= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_1)$，$2\mathrm{I}_2(= \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_2)$，$2\mathrm{I}_3(= \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_3)$ を考える。そのときに必要なのは，楕円曲線 $\mathcal{E}$ の接線である。

楕円曲線 $\mathcal{E}$ に対して，$\mathcal{E}$ 上の 4 点 I_0，I_1，I_2，I_3 における接線をそれぞれ引くと，驚くべきことに，

- この 4 本の接線はすべて 1 点で交わり，かつ，
- その交点は楕円曲線 $\mathcal{E}$ 上にある

ということが確認できる。（ついでに言うと，その交点は T である。次ページの図を参照。）



したがって，I_0 を群の単位元とみなしたとき，上の図から次の演算結果が得られる；

$$2\mathrm{I}_1 = 2\mathrm{I}_2 = 2\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_0$$

（このとき，当然 $2\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_0$ である。）

以上の演算結果を元に，I_0 を群の単位元とみなした場合の 4 点 I_0，I_1，I_2，I_3 の演算表を作ってみると，次のようになる。これは，「**クラインの 4 元群**」の演算表そのものである。

$+$	I_0	I_1	I_2	I_3
I_0	I_0	I_1	I_2	I_3
I_1	I_1	I_0	I_3	I_2
I_2	I_2	I_3	I_0	I_1
I_3	I_3	I_2	I_1	I_0

なお，I_1 や I_2 や I_3 を群の単位元とみなすことも可能である。例えば I_1 を群の単位元とすれば，演算表は次のようになるが，これもまた「クラインの 4 元群」の演算表である。

$+$	I_0	I_1	I_2	I_3
I_0	I_1	I_0	I_3	I_2
I_1	I_0	I_1	I_2	I_3
I_2	I_3	I_2	I_1	I_0
I_3	I_2	I_3	I_0	I_1

あとがき

以上，3 つの節に分けて

- 動点 P が「辺 AB に平行な直線上」を動くとき（§ 1.）
- 動点 P が「辺 AB に垂直な直線上」を動くとき（§ 2.）
- 動点 P が「辺 AB の中点を通る直線上」を動くとき（§ 3.）

について考察し，これらの場合，（ごく少数の例外を除いて）**内心と傍心の軌跡は「楕円曲線」になる**ことが確認できた。また，§ 3. では，点 P がちょうど軌跡の楕円曲線上にある場合に**内心と傍心が「クラインの 4 元群」を構成する**ことも確認できた。これらの事実が既に知られていることかどうかわからないが，少なくとも「よく知られた事実」ではないと思われる。

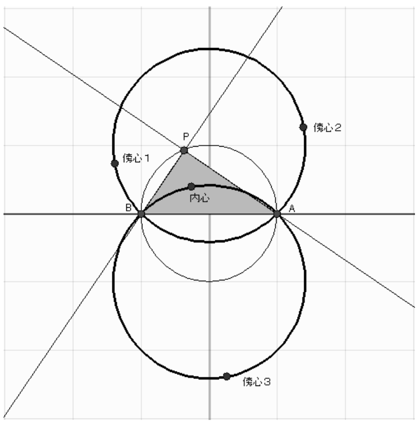
今回は，動点 P が「特殊な直線上」を動く場合についてだけ考察したに過ぎない。今後はさらに，「一般の直線上」を動く場合について考察してみたい。

なお，私のプライベートな Web サイトにて，**例 1–1**〜**例 3–2** のアニメーションを公開している。興味のある方は，**JAVA** が利用可能なブラウザでアクセスしていただきたい。

平面幾何教室 http://www.geocities.jp/osaqmath/

最後に，せっかく調べたので，「動点 P が円上を動く場合」について，1 つだけ紹介しておくことにする。

動点 P が「線分 AB を直径とする円上」を動くとき，△PAB の内心と傍心の軌跡は次の図のような 2 円となる。



参考文献と利用したアプリケーション

楕円曲線の双有理変換の方法については，次の書籍を参考にした。

- **「フェルマーの大定理が解けた！」**
  （足立恒雄著，講談社ブルーバックス，1995，ISDN4-06-257074-2）

また，本稿で使った画像はすべて，

- **「シンデレラ～幾何学のためのグラフィックス～」**
  （J. リヒター・ゲバート，U.H. コルテンカンプ著，阿原一志訳，
  シュプリンガー・フェアラーク東京，2003，ISDN4-431-70966-5）

に収録されている幾何ソフト「**シンデレラ**」で描いた。