2 次曲線の分類と，接線の方程式

豆知識　「2 次曲線」は，別名「円錐曲線」とも言います。

2 次曲線の接線の方程式 I（特別な 2 次曲線の公式）

- 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1}$$

◇ 楕円 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}+\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$\boxed{\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2}+\frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2}=1}$$

- 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1}$$

◇ 双曲線 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=\pm1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$\boxed{\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2}-\frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2}=\pm1}$$

- 放物線 $y^2=4px$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$\boxed{y_1y=2p(x+x_1)}$$

◇ 放物線 $(y-t)^2=4p(x-s)$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$\boxed{(y_1-t)(y-t)=4p\left(\frac{x+x_1}{2}-s\right)}$$

2 次方程式の分類

x と y の 2 次方程式 $\underline{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$ …… ★ が表す図形は，定数 A〜F の値によって，次の 4 つの場合がある。

- 図形を表さない（例. $x^2+y^2+1 = 0$）← この式を満たす実数 x，y は存在しない
- 1 点（例. $x^2+y^2 = 0$）← $x = y = 0$，つまり点 $(0, 0)$
- 2 直線（例. $x^2+2xy+y^2 - 1 = 0$）← $(x+y+1)(x+y-1) = 0$
- 2 次曲線
  - ◇ 2 次曲線は，さらに 楕円，放物線，双曲線 の 3 つに分類できる。

※ 方程式 ★ が 2 次曲線を表すならば，

- $B^2 - 4AC < 0$ のとき 楕円
- $B^2 - 4AC = 0$ のとき 放物線
- $B^2 - 4AC > 0$ のとき 双曲線

になることが知られているが，方程式 ★ が 2 次曲線を表すかどうか（図形を表さない，1 点，2 直線，2 次曲線 のどれになるか）の判定は，$B \neq 0$ の場合は難しい。（$B = 0$ の場合の判定は容易で，x，y それぞれに対して平方完成を行えばよい。）
ただし，$B \neq 0$ の「2 次曲線」は高校数学では扱わないので，今は心配しなくてよい。（例外として，$B \neq 0$ であっても，$A = C = 0$ の場合は「反比例のグラフを平行移動した直角双曲線」となり，高校数学の学習範囲内である。）

2 次曲線の接線の方程式 II（一般の 2 次曲線の性質）

方程式 $\underline{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$ が**2 次曲線を表すならば**，その 2 次曲線上の点 (x_1, y_1) における接線は，次の式で表される。

$$\boxed{Ax_1x + Cy_1y + D \cdot \frac{x+x_1}{2} + E \cdot \frac{y+y_1}{2} + F = 0}$$

- 要は，$\underline{x^2 \to x_1x}$，$\underline{y^2 \to y_1y}$，$\underline{x \to \frac{x+x_1}{2}}$，$\underline{y \to \frac{y+y_1}{2}}$ と置換すると，点 (x_1, y_1) における接線の方程式になる。
- 項 Bxy がある場合は，更に $\underline{xy \to \frac{xy_1+x_1y}{2}}$ という置換が加わる。

問題 1　放物線 $y = x^2$ 上の点 $(3, 9)$ における接線の方程式を求めよ。

（解法 1：普通の求め方）

$f(x) = x^2$ とおくと，$f'(x) = 2x$ より $f'(3) = 6$

したがって，接線の方程式は $y-9 = 6(x-3)$，$\therefore \underline{y = 6x - 9}$

（解法 2：前ページの知識を使った求め方）

放物線 $y = x^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $\dfrac{y+y_1}{2} = x_1 x$

これに x_1=3，y_1=9 を代入して $\dfrac{y+9}{2} = 3x$，$\therefore \underline{y = 6x - 9}$

問題 2　双曲線 $xy = 8$ 上の点 $(2, 4)$ における接線の方程式を求めよ。

（解法 1：一番簡単な求め方）

$xy = 8 \iff y = \dfrac{8}{x}$ である。

$f(x) = \dfrac{8}{x}$ とおくと，$f'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$ より $f'(2) = -2$

したがって，接線の方程式は $y-4 = -2(x-2)$，$\therefore \underline{y = -2x + 8}$

（解法 2：陰関数の微分を用いた求め方）

$xy = 8$ の両辺を x で微分すると $y + x \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$,

よって $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ であるから，点 $(2, 4)$ における接線の傾きは $-\dfrac{4}{2} = -2$

したがって，接線の方程式は $y-4 = -2(x-2)$，$\therefore \underline{y = -2x + 8}$

（解法 3：前ページの知識を使った求め方）

双曲線 $xy = 8$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $\dfrac{x_1 y + x y_1}{2} = 8$

これに x_1=2，y_1=4 を代入して $\dfrac{2y+4x}{2} = 8$，$\therefore \underline{y = -2x + 8}$

補足　問題 2 において，（解法 2）の $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ は，（解法 1）の $f'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$ と同じものです。（$\because y = \dfrac{8}{x}$）

一般の 2 次方程式 $\underline{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$ …… ★ の接線の公式の証明はとても大変なので，$A=C=0$ の場合に限定して証明する。（★の接線の公式も，証明の方法は同じ。）

問題　方程式 $Bxy+Dx+Ey+F=$ が 2 次曲線を表しているならば，この 2 次曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式が，次の式で表されることを示せ。

$$B\cdot\frac{xy_1+x_1y}{2}+D\cdot\frac{x+x_1}{2}+E\cdot\frac{y+y_1}{2}+F=0$$

（証明）$Bxy+Dx+Ey+F=0$ の両辺を x で微分すると

$$B\left(y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)+D+E\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

これを $\dfrac{dy}{dx}$ について解くと，$Bx+E\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{By+D}{Bx+E}$，

したがって，$x_1\neq -\dfrac{E}{B}$ ならば，点 (x_1, y_1) における接線の傾きは，$-\dfrac{By_1+D}{Bx_1+E}$

よって，点 (x_1, y_1) （ただし $x_1\neq -\dfrac{E}{B}$）における接線の方程式は

$$y-y_1=-\frac{By_1+D}{Bx_1+E}(x-x_1)$$

これを変形して

$$\begin{aligned}&(Bx_1+E)(y-y_1)=-(By_1+D)(x-x_1)\\ \iff\ &B(x_1y+xy_1)-2Bx_1y_1+D(x-x_1)+E(y-y_1)=0 \quad \cdots①\end{aligned}$$

ここで，(x_1, y_1) は $Bxy+Dx+Ey+F=0$ 上の点なので，

$$Bx_1y_1+Dx_1+Ey_1+F=0 \quad \cdots②$$

①の両辺を $\dfrac{1}{2}$ 倍して，②と辺々加えると

$$B\cdot\frac{xy_1+x_1y}{2}+D\cdot\frac{x+x_1}{2}+E\cdot\frac{y+y_1}{2}+F=0$$

また，$x_1=-\dfrac{E}{B}$ のときの接線も，これに一致する。（ここに関しては割愛）

（証明終）

高度な問い　上の問題で，「方程式 $Bxy+Dx+Ey+F=$ が 2 次曲線を表しているならば」という仮定が証明のどこに使われているか，わかりますか？