

初等複素関数の「定義」と「関係式」

(例えば $z = 3+2i$ などのような) 複素数 $z = x+iy$ (x, y は実数) に対して, (1) e^z , (2) $\cos z$, (3) $\sin z$, (4) $\cosh z$, (5) $\sinh z$ を, それぞれ級数を用いて次のように定義する。

[公式 1] 初等複素関数の定義

$$(1) \quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$(2) \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$(4) \quad \cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$(5) \quad \sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

上の [公式 1] (定義) と $i^2 = -1$ から, 次の関係式が即座に導かれる。

[公式 2] 指数関数と三角関数の関係式, 指数関数と双曲線関数の関係式

任意の複素数 z に対して

$$(1) \quad e^z = \cosh z + \sinh z, \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$(2) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$(3) \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{-2i}$$

$$(4) \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(5) \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

特に, $\cos$ と $\cosh$, $\sin$ と $\sinh$ には次の関係がある。

[公式 2'] 三角関数と双曲線関数の関係式

任意の複素数 z に対して

$$\bullet \quad \cos(iz) = \cosh z, \quad \cosh(iz) = \cos z \quad \text{※ } \underline{\cos} \text{ と } \underline{\cosh} \text{ の関係式}$$

$$\bullet \quad \sin(iz) = i \sinh z, \quad \sinh(iz) = i \sin z \quad \text{※ } \underline{\sin} \text{ と } \underline{\sinh} \text{ の関係式}$$

次の「加法定理^(脚注)」と「相互関係」は、[公式 2] から即座にすぐに導かれる。

[公式 3] 初等複素関数の加法定理

任意の複素数 z_1, z_2 に対して

- (1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
- (2) $\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$
- (3) $\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$
- (4) $\cosh(z_1+z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$
- (5) $\sinh(z_1+z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$

[公式 4] 初等複素関数の相互関係

任意の複素数 z に対して

- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ※ cos と sin の関係式
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ ※ cosh と sinh の関係式

ところで、 $z = x + iy$ (x, y は実数) とすると、初等関数 (1)~(5) はそれぞれ次のようになる。

[公式 5] 初等複素関数の実関数表示

任意の複素数 $x + iy$ (x, y は実数) に対して

- (1) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \cdot \sin y) \left[= e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y \right]$
- (2) $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \cdot \sin x \sinh y$
- (3) $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cdot \cos x \sinh y$
- (4) $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \cdot \sinh x \sin y$
- (5) $\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cdot \cosh x \sin y$

[公式 5] は、[公式 3] の特別な場合 ($z_1 = x, z_2 = iy$ の場合) に過ぎないが、右辺で用いている関数はすべて(「複素関数」ではなく)「実関数」であることを注意しておく。すなわち、これらの初等複素関数はすべて、ある「実関数」 $f(x, y), g(x, y)$ を用いて

$$f(x, y) + i \cdot g(x, y)$$

の形で表記できるのである。

^(脚注) [公式 3] の (1) は一般には「指数法則」と呼ばれるが、その形式から、ここでは「加法定理」と分類した。