## あ 母平均 $m = E(X)$ と母標準偏差 $\sigma = \sigma(X)$

大きさ $N$ の母集団において，
変量 $x$ のとる異なる値 $x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_r$ に対し，
それぞれの値をとる度数を $f_1$，$f_2$，$\cdots$，$f_r$ とする。

| $x$ | 度数 | 相対度数 |
|---|---|---|
| $x_1$ | $f_1$ | $f_1/N$ |
| $x_2$ | $f_2$ | $f_2/N$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_r$ | $f_r$ | $f_r/N$ |
| 計 | $N$ | 1 |

- 母集団における変量 $x$ の平均
  $m = \dfrac{x_1f_1 + x_2f_2 + \cdots + x_rf_r}{N}$
- 母集団における変量 $x$ の標準偏差
  $\sigma = \sqrt{\dfrac{(x_1-m)^2f_1 + (x_2-m)^2f_2 + \cdots + (x_r-m)^2f_r}{N}}$

この $N$ 個のデータから 1 個の要素を無作為に抽出したときの値を $X$ とすると，$X$ は確率変数である。

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_r$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{f_1}{N}$ | $\frac{f_2}{N}$ | $\cdots$ | $\frac{f_r}{N}$ | 1 |

ここで，$\dfrac{f_k}{N} = p_k$ とおくと，

- $X$ の平均 $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_rp_r$
- $X$ の標準偏差 $\sigma(X) = \sqrt{\left(x_1-E(X)\right)^2p_1 + \left(x_2-E(X)\right)^2p_2 + \cdots + \left(x_r-E(X)\right)^2p_r}$

$m = E(X)$ であり，これを **母平均** という。$\sigma = \sigma(X)$ であり，これを **母標準偏差** という。（なお，確率変数 $X$ の確率分布のことを **母集団分布** という。）

## い 標本平均 $\overline{X}$ と標本標準偏差 $S$

あ の母集団から大きさ $n$ の標本を無作為に抽出し，その $n$ 個の要素における変量 $x$ の値を $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ とする。この抽出が復元抽出ならば，$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ はそれぞれが母集団分布に従う互いに独立な確率変数である。（この抽出が非復元抽出であっても，標本の大きさ $n$ に比べて母集団の大きさが十分大きい場合は，近似的にそれぞれが母集団分布に従う互いに独立な確率変数と考えてよい。）

- $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ の平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$
  これを **標本平均** という。
- $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ の標準偏差 $S = \sqrt{\dfrac{\left(X_1-\overline{X}\right)^2 + \left(X_2-\overline{X}\right)^2 + \cdots + \left(X_n-\overline{X}\right)^2}{n}}$
  これを **標本標準偏差** という。
  ※ 標本の大きさ $n$ が大きいとき，$S \fallingdotseq \sigma(X)$ となることが知られている。

### $\boxed{う}$ 標本平均 $\overline{X}$ の分布

$\boxed{い}$ において，標本平均 $\overline{X}$ は，「標本を抽出する」という試行の結果によって値の定まる確率変数である。よって，「$\overline{X}$ の期待値 $E\left(\overline{X}\right)$」と「$\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma\left(\overline{X}\right)$」を考えることができる。

確率変数 $X$ が正規分布に従っていなくても，標本平均 $\overline{X}$ は，$n$ が大きいとき**近似的に**正規分布に従うことが知られている。（これを「**中心極限定理**」という。）

（なお，確率変数 $X$ が正規分布に従うならば，標本平均 $\overline{X}$ は**常に**正規分布に従う。）

### $\boxed{う}$ と $\boxed{あ}$ の関係

- $E\left(\overline{X}\right) = E(X)$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

（証明）　まず，$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = E(X)$ より

$$\begin{aligned} E\left(\overline{X}\right) &= E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left\{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\right\} = \frac{1}{n}\cdot nE(X) = E(X) \end{aligned}$$

また，$\sigma(X_1) = \sigma(X_2) = \cdots = \sigma(X_n) = \sigma(X)$ であることと，復元抽出の場合は $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ が互いに独立であること（非復元抽出の場合も母集団が十分大きいときに近似的に復元抽出とみなせること）から，

$$\begin{aligned} \sigma\left(\overline{X}\right) &= \sqrt{V\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2}\left\{V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)\right\}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot nV(X)} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

（証明終）

**中心極限定理**と合わせて考えると，$\overline{X}$ は正規分布 $N\left(E(X), \dfrac{V(X)}{n}\right)$ に従うと言える。

**標本平均 $\overline{X}$ からの仮説検定**

標本の大きさ $n$ が大きいとき，$\overline{X}$ は，**近似的に**正規分布に従う。（**中心極限定理**）

$Z = \dfrac{\overline{X} - E\left(\overline{X}\right)}{\sigma\left(\overline{X}\right)}$ とすると，$Z$ は**近似的に**標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

- $E\left(\overline{X}\right) = E(X)$ である。（$m = E(X)$ は帰無仮説の値。）
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ である。
  母標準偏差 $\sigma = \sigma(X)$ が不明な場合は，標本の大きさ $n$ が大きければ，
  母標準偏差の代わりに標本標準偏差 $S$ を用いても差し支えない。

**例題**　300 g 入りと表示された塩の袋の山から，無作為に 100 袋を抽出して重さを調べたところ，平均値が 298.9 g であった。母標準偏差が 5.0 g であるとき，1 袋あたりの重さは表示通りでないと判断してよいか。有意水準 5 % で検定せよ。

**解法**　無作為抽出した 100 袋について，重さの標本平均を $\overline{X}$ とする。標本の大きさ 100 は十分大きいと考えると，$\overline{X}$ は近似的に正規分布に従う。（中心極限定理）

対立仮説 $H_1$『母平均 $m \neq 300$』に対して，帰無仮説 $H_0$『母平均 $m = 300$』をとる。

帰無仮説 $H_0$ が正しいとするとき，

$$E\left(\overline{X}\right) = m = 300, \quad \sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5.0}{\sqrt{100}} = 0.5$$

より，$Z = \dfrac{\overline{X} - 300}{0.5}$ とおくと，$Z$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

ここで，正規分布表より，**（両側検定の）有意水準 5 %の棄却域は $|Z| \geqq 1.96$** である。

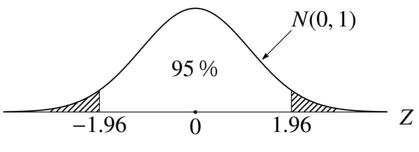
考え方 1

$\overline{X} = 298.9$ のとき

$$Z = \frac{298.9 - 300}{0.5} \fallingdotseq -2.2$$

この値は棄却域 $|Z| \geqq 1.96$ に入るから，

帰無仮説 $H_0$ は棄却できる。



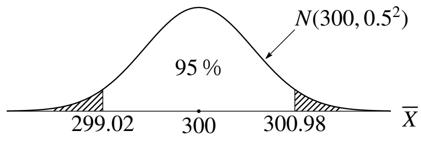

考え方 2

棄却域 $|Z| \geqq 1.96$ と $Z = \dfrac{\overline{X} - 300}{0.5}$ より

$$\left|\overline{X} - 300\right| \geqq 1.96 \times 0.5 = 0.98$$

$\overline{X} = 298.9$ はこの範囲に入るから，

帰無仮説 $H_0$ は棄却できる。




すなわち，この結果から，1 袋あたりの重さは表示どおりでないと判断してよい。

## 棄却域

| 検定の種類 | 有意水準 5 %の棄却域 | 有意水準 1 %の棄却域 |
|---|---|---|
| 両側検定 | $\lvert Z\rvert \geqq 1.96$<br>（$Z \leqq -1.96$ または $Z \geqq 1.96$） | $\lvert Z\rvert \geqq 2.58$<br>（$Z \leqq -2.58$ または $Z \geqq 2.58$） |
| 片側検定（上側） | $Z \geqq 1.64$ | $Z \geqq 2.33$ |
| 片側検定（下側） | $Z \leqq -1.64$ | $Z \leqq -2.33$ |

| $u$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | $\boxed{0.4495}$ 約45%(95%-50%) | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | $\boxed{0.4750}$ 約47.5%(95%の半分) | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | $\boxed{0.4901}$ 約49%(99%-50%) | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | $\boxed{0.4951}$ 約49.5%(99%の半分) | 0.4952 |
| 2.6 | 0.49534 | 0.49547 | 0.49560 | 0.49573 | 0.49585 | 0.49598 | 0.49609 | 0.49621 | 0.49632 | 0.49643 |
| 2.7 | 0.49653 | 0.49664 | 0.49674 | 0.49683 | 0.49693 | 0.49702 | 0.49711 | 0.49720 | 0.49728 | 0.49736 |
| 2.8 | 0.49744 | 0.49752 | 0.49760 | 0.49767 | 0.49774 | 0.49781 | 0.49788 | 0.49795 | 0.49801 | 0.49807 |
| 2.9 | 0.49813 | 0.49819 | 0.49825 | 0.49831 | 0.49836 | 0.49841 | 0.49846 | 0.49851 | 0.49856 | 0.49861 |
| 3.0 | 0.49865 | 0.49869 | 0.49874 | 0.49878 | 0.49882 | 0.49886 | 0.49889 | 0.49893 | 0.49897 | 0.49900 |

**母平均 $m = E(X)$ に対する信頼区間（ $\boxed{い}$ から $\boxed{あ}$ を推定）**

- 母平均 $m = E(X)$ に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$\left[\overline{X} - 1.96 \cdot \sigma\left(\overline{X}\right),\quad \overline{X} + 1.96 \cdot \sigma\left(\overline{X}\right)\right]$$

ここで，$\sigma\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ であるから，

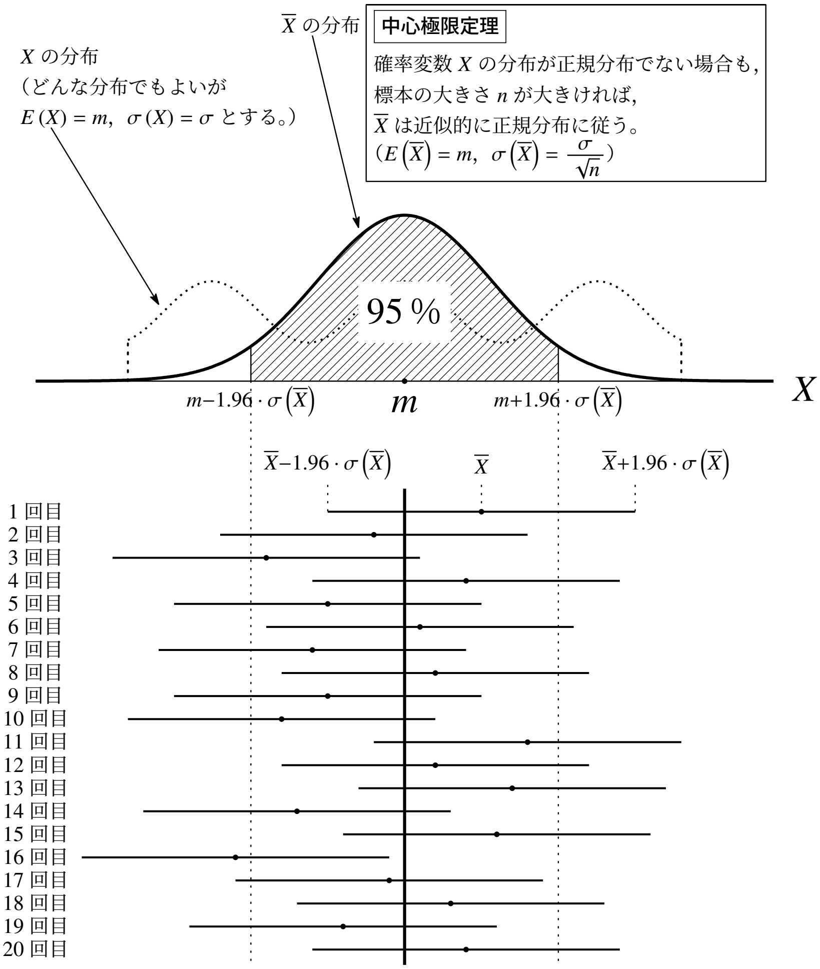
$$\left[\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right]$$

- 信頼度 99%の信頼区間は，1.96 の代わりに 2.58 を使う。
- 母標準偏差 $\sigma = \sigma(X)$ が不明な場合は，標本の大きさ $n$ が大きければ，母標準偏差の代わりに標本標準偏差 $S$ を用いても差し支えない。

### 信頼度 95 %の信頼区間の意味

母集団から標本を無作為に抽出するたび，標本平均 $\overline{X}$ の値は異なる。

$\overline{X}$ が区間 $\left[m-1.96\cdot\sigma\left(\overline{X}\right),\ m+1.96\cdot\sigma\left(\overline{X}\right)\right]$ 内に入る確率は 95 %（20 回に 19 回程度）。この $\overline{X}$ の値に対しては，区間 $\left[\overline{X}-1.96\cdot\sigma\left(\overline{X}\right),\ \overline{X}+1.96\cdot\sigma\left(\overline{X}\right)\right]$ が $m$ を含む。




標本抽出を繰り返し，その都度 $\left[\overline{X}-1.96\cdot\sigma\left(\overline{X}\right),\ \overline{X}+1.96\cdot\sigma\left(\overline{X}\right)\right]$ という区間を作ると，これらの区間には母平均 $m$ を含むものが 95 %（20 回に 19 回程度）あることが期待される。

これが，「母平均 $m$ に対する**信頼度 95 %の信頼区間**」の意味である。

**母比率 $p$ と標本比率 $R$**

- 母集団全体の中で特性 A をもつ要素の割合を，特性 A の **母比率** といい，$p$ で表す。（母比率 $p$ は，母平均 $m = E(X)$ の特別な場合である。）
- 標本の中で特性 A をもつ要素の割合を，特性 A の **標本比率** といい，$R$ で表す。（標本比率 $R$ は，標本平均 $\overline{X}$ の特別な場合である。）

「特別な場合」とは，次のような意味である。

大きさ $N$ の母集団から，大きさ $n$ の標本を抽出する。特性 A の母比率が $p$ である母集団において，特性 A をもつ要素を 1，もたない要素を 0 で表す。

| $X_i$ | 1 | 0 | 計 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $1-p$ | 1 |

変量 $x$ を考えると，標本の各要素を表す $x$ の値 $X_i$ は 1 または 0 の値をとる確率変数であり，

$$p = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}, \quad R = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

以上より，$p$ は母平均 $m$，$R$ は標本平均 $\overline{X}$ の特別な場合に他ならない。

大きさ $n$ の標本のうち，特性 A をもつものの個数 $T$ は二項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ に従う。このとき，

- $E(T) = np$
- $\sigma(T) = \sqrt{np(1-p)}$

ここで，$R = \dfrac{T}{n}$ であるから，

- $E(R) = \dfrac{E(T)}{n} = p$
- $\sigma(R) = \dfrac{\sigma(T)}{n} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

**標本内の個数 $T$ からの仮説検定**

大きさ $n$ の標本において，特性 A をもつ要素の個数 $T$ は二項分布に従う。よって，標本の大きさ $n$ が大きいとき，$T$ は**近似的に**正規分布に従う。

$Z = \dfrac{T - E(T)}{\sigma(T)}$ とすると，$Z$ は**近似的に**標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

- $E(T) = np$ である。（母比率 $p$ は帰無仮説の値。）
- $\sigma(T) = \sqrt{np(1-p)}$ である。（母比率 $p$ は帰無仮説の値。）

**標本比率 $R$ からの仮説検定**

大きさ $n$ の標本において，特性 A をもつ標本比率を $R$ は，$R = \dfrac{T}{n}$ である。よって，標本の大きさ $n$ が大きいとき，$R$ は**近似的に**正規分布に従う。

$Z = \dfrac{R - E(R)}{\sigma(R)}$ とすると，$Z$ は**近似的に**標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

- $E(R) = \dfrac{E(T)}{n} = p$ である。（母比率 $p$ は帰無仮説の値。）
- $\sigma(R) = \dfrac{\sigma(T)}{n} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ である。（母比率 $p$ は帰無仮説の値。）

$n$ が大きいとき，**大数の法則**により，$R$ は $p$ に近いとみなせる。したがって，$p$ の代わりに $R$ を用いて $\sigma(R) = \sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$ と書くことができる。（ちなみに，$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$，$S = \sqrt{R(1-R)}$ であるから，これは $\sigma = \sigma(X)$ の代わりに $S$ を用いることに相当する。）

**母比率 $p$ に対する信頼区間**

- 母比率 $p$ に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$\left[R - 1.96 \cdot \sigma(R),\quad R + 1.96 \cdot \sigma(R)\right]$$

ここで，$n$ が十分大きいとき $\sigma(R) \fallingdotseq \sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$ であるから，

$$\left[R - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\quad R + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right]$$

- 信頼度 99%の信頼区間は，1.96 の代わりに 2.58 を使う。