樹形図から場合の数を求める

参拾萬数学工房
(http://www.300000.net/)

はじめに

以下の各等式が成り立つことは，よく知られている；

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{N} k(k+1) = \frac{N(N+1)(N+2)}{3}$$
$$\sum_{k=1}^{N} k(k+1)(k+2) = \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{4}$$
$$\sum_{k=1}^{N} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}{5}$$
$$\vdots$$

たとえば第 1 式は，次のようにして導くことができる；

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k &= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k(k+1)}{2}-\frac{(k-1)k}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1\cdot 2}{2}-\frac{0\cdot 1}{2}\right)+\left(\frac{2\cdot 3}{2}-\frac{1\cdot 2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{N(N+1)}{2}-\frac{(N-1)N}{2}\right)\\ &= \frac{N(N+1)}{2}\end{aligned}$$

この方法は，第 1 式の導き方としては一般的ではないが，第 2 式以降はこれに準じた方法で導くのがもっとも簡易であろう。

そして，これらの等式から，次の諸等式が直ちに導かれる；

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2!} = {}_{(N+1)}C_2$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{j} k\right) = \frac{N(N+1)(N+2)}{3!} = {}_{(N+2)}C_3$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(\sum_{k=1}^{j} k\right)\right) = \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{4!} = {}_{(N+3)}C_4$$

$$\sum_{h=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{h}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(\sum_{k=1}^{j} k\right)\right)\right) = \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}{5!} = {}_{(N+4)}C_5$$

$$\vdots$$

$\sum$ が増えるたびに添え字を k，j，i，h，... と増やしていくのは煩わしい。また，括弧を重ね続けるのも，見た目に煩雑である。そこで，以下ではこれらを次のように略記する。

$$\overbrace{\sum^{N}\sum\cdots\sum}^{p\text{ 個}} k = \frac{N(N+1)\cdots(N+p)}{(p+1)!} = {}_{(N+p)}C_{(p+1)}$$

本稿では，この「多重和」の公式を利用して，樹形図から場合の数を求める方法を述べる。

また，主題からは若干かけ離れるが，最後の節にて，重複組合せ ${}_nH_r$ の関係式を 2 つ紹介する。(→ § 6.)

§ 1.　組合せ ${}_nC_r$

組合せ ${}_nC_r$ は，順列 ${}_nP_r$ を r! で割って

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

と求めるのが普通である。また，これと ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ から即座に得られる

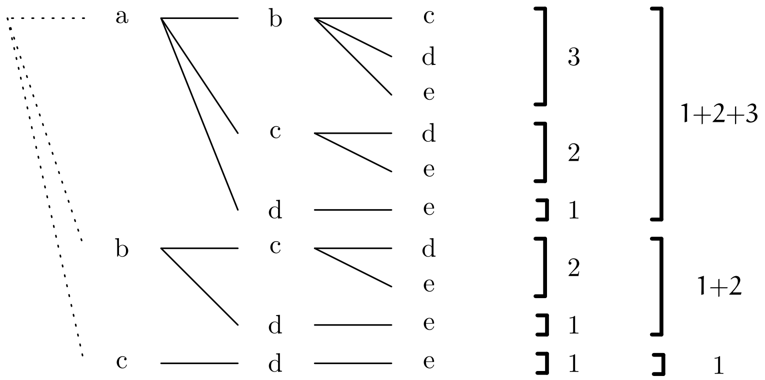
$${}_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$$

という結果は常識とされる。

しかし，樹形図を描くと，${}_nC_r$ と ${}_nC_{(n-r)}$ は異なるものであるということが再認識できる。

問題 1.　a，b，c，d，e の 5 色の球が，各 1 個ずつある。このとき，この中から 3 個の球を選ぶ方法は何通りあるか。

樹形図を用いた解法

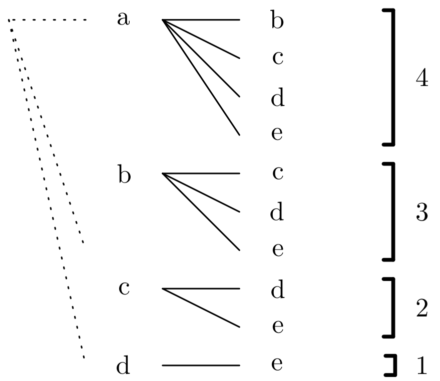


樹形図の分岐を下から数えれば，求める場合の数は

$$1+(1+2)+(1+2+3)=\sum^{3}\sum k=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3!}=\underline{10\text{（通り）}}\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

問題 2.　a，b，c，d，e の 5 色の球が，各 1 個ずつある。このとき，この中から 2 個の球を選ぶ方法は何通りあるか。

樹形図を用いた解法



樹形図の分岐を下から数えれば，求める場合の数は

$$1+2+3+4=\sum^{4}k=\frac{4\cdot 5}{2!}=\underline{10\text{（通り）}}\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

§ 2.　重複組合せ $_nH_r$

問題 3.　a，b，c の 3 色の球が，それぞれたくさんある。同じ色の球を何個選んでもよいとき，この中から 3 個の球を選ぶ方法は何通りあるか。ただし，選ばない色があっても構わないものとする。

この問題は，次のように解くのが一般的であろう；

一般的な解法

選んだ 3 個の球を a，b，c の順に一列に並べ，その後，色 a と色 b の間に｜を，そして色 b と色 c の間にも｜を挟むことにすれば，球の色を区別せずにすべて「●」という同じ記号で表しても，何色が何個あるかわかる。

いくつか例を挙げれば，

●｜●｜●　→　a が 1 個，b が 1 個，c が 1 個
●●｜｜●　→　a が 2 個，b が 0 個，c が 1 個
｜●●●｜　→　a が 0 個，b が 3 個，c が 0 個

など。

このことは，「3 種類のものから重複を許して 3 個選ぶ方法」が「● 3 個と｜ 2 個を並べる方法」と一対一に対応していることを意味する。

すなわち，求める場合の数は

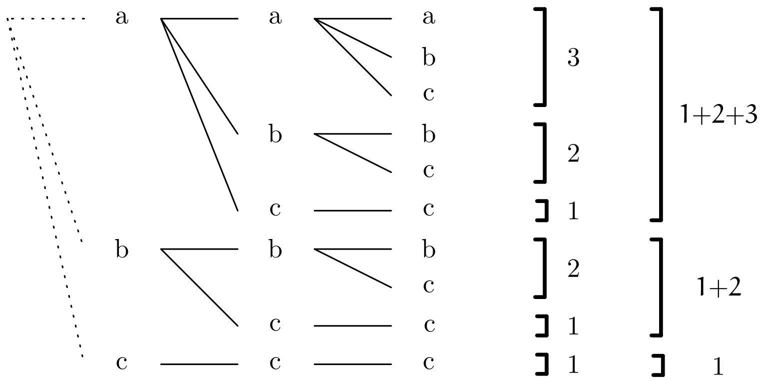
$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}\,(={}_5C_3)\ (={}_5C_2) = \underline{10\ (\text{通り})}\cdots\cdots\ \boxed{\text{答}}$$

「n 種類のものから重複を許して r 個選ぶ方法」は，常に「r 個の“●”と (n−1) 個の“｜”を並べる方法」と一対一に対応する。したがって，次の等式が成り立つ；

$$ {}_nH_r = {}_{(n+r-1)}C_r = {}_{(n+r-1)}C_{(n-1)}$$

通常は，これを「重複組合せの公式」として教えるのだが，この問題も，樹形図を描くとどうなるか，考察してみたい。

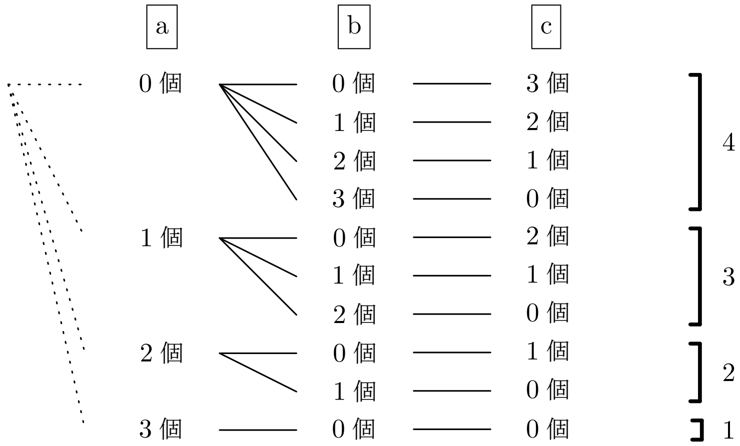
樹形図を用いた解法 (1)



樹形図の分岐を下から数えれば，求める場合の数は

$$1+(1+2)+(1+2+3)=\sum^{3}\sum k=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3!}=\underline{10\text{（通り）}}\cdots\cdots\boxed{答}$$

樹形図を用いた解法 (2)



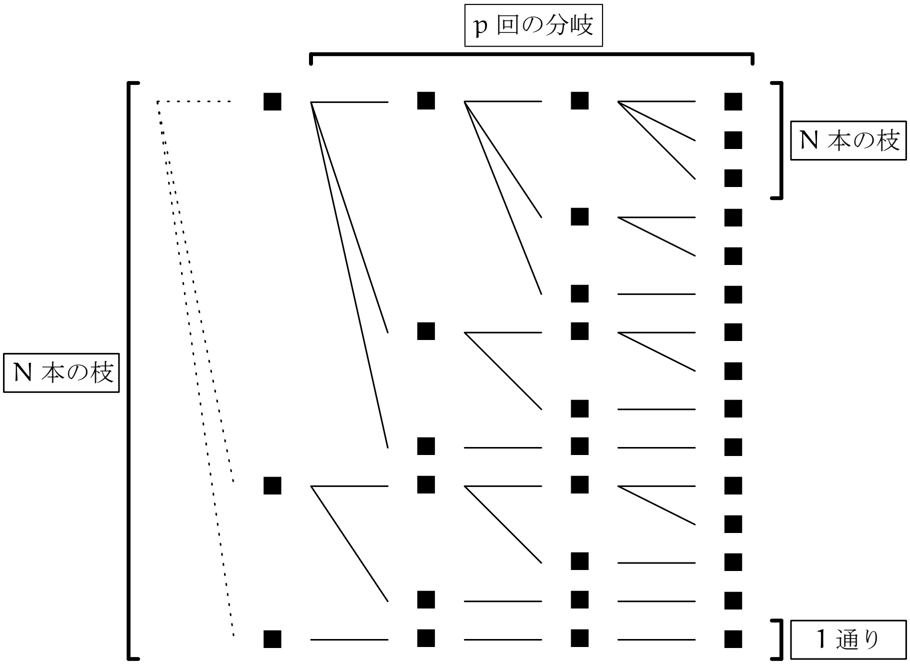
c の個数は a，b によって自動的に決まり，b から c にかけては分岐しない（つまり，分岐は 1 回のみである）ことに注意する。樹形図の分岐を下から数えれば，求める場合の数は

$$1+2+3+4=\sum^{4}k=\frac{4\cdot 5}{2!}=\underline{10\text{（通り）}}\cdots\cdots\boxed{答}$$

以下のページでは，樹形図は後者の形を用いて論を進めることにする。

§ 3.　樹形図から場合の数を求める公式

ここまでの考察から，「枝の分かれ方が下にいくたびに 1 ずつ減っていく樹形図」に対して，次のような一般化ができることは明らかであろう。



N，p を上図の通りとすると，求める場合の数は

$$\overbrace{\sum^{N}\sum\cdots\sum}^{p\text{ 個}} k = \frac{N(N+1)\cdots(N+p)}{(p+1)!} = {}_{(N+p)}C_{(p+1)} \text{（通り）}$$

上の樹形図は「N = 3，p = 3 の場合」が描いてあるが，実際に樹形図の分岐を下から数えれば $1 + \left\{1 + (1+2)\right\} + \left\{1 + (1+2) + (1+2+3)\right\}$，すなわち，

$$\sum^{3}\sum\sum k = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4!} = 15 \text{（通り）}$$

である。

§ 4.　応用例

前ページの事実を知っていると，個々の問題の解法を丸暗記せずとも，ひとたび樹形図を描き始めればたちどころに場合の数が求まる問題が多々あることに気づく。

以下，重複組合せの定番問題に対し，それらの問題の一般的に教えられている解法と樹形図を用いた解法を並記する。（その問題特有の解法と言える部分を**太字**で記した。）

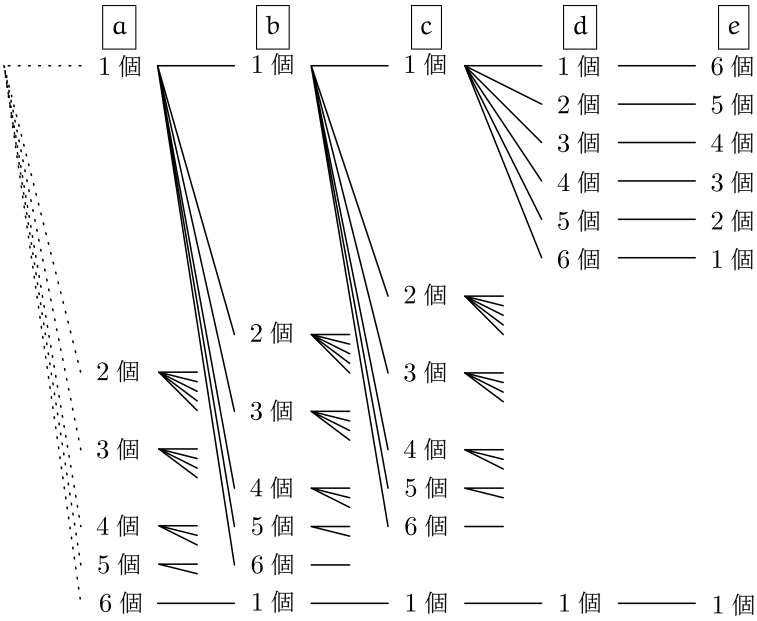
問題 4.　a，b，c，d，e の 5 色の球が，それぞれたくさんある。同じ色の球を何個選んでもよいとき，この中から 10 個の球を選ぶ方法は何通りあるか。ただし，すべての色の球を少なくとも 1 個は必ず選ぶものとする。

一般的な解法

「すべての色の球を必ず 1 個選ぶ」という条件があるので，あらかじめすべての色から球を 1 個ずつ選んでおく。そうすれば，残りの 5 個は制約なく選べる。

$$\therefore \quad {}_5\mathrm{H}_5 = {}_9\mathrm{C}_5 = \underline{126\text{（通り）}}\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

樹形図を用いた解法



$$\therefore \quad \sum^{6}\sum\sum k = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4!} = \underline{126\text{（通り）}}\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

問題 5.　見分けのつかない 10 個の球を 5 つの箱 A，B，C，D，E に分ける方法は何通りあるか。ただし，空の箱があってはならないものとする。

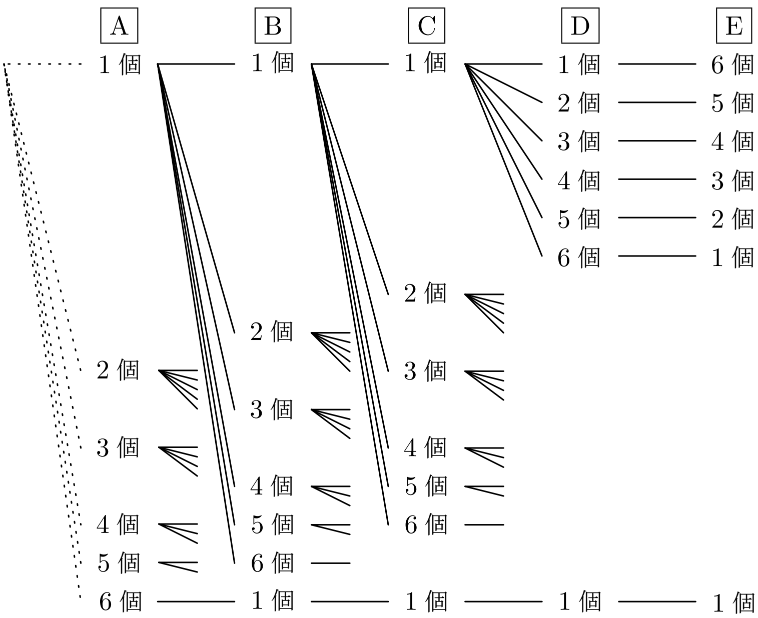
一般的な解法

箱 A に入れた球を色 a に，箱 B に入れた球を色 b に，箱 C に入れた球を色 c に，箱 D に入れた球を色 d に，そして箱 E に入れた球を色 e に塗ることを考えれば，その方法は「a，b，c，d，e の 5 色の球から 10 個選ぶ方法」と一対一に対応する。また，「空の箱があってはならない」という条件より，すべての箱にあらかじめ球を 1 個ずつ入れておく。そうすれば，残り 5 個の球は制約なく分けることができる。**すなわち，この問題は 問題 4. と同値である。**

$$\therefore \quad {}_5\mathrm{H}_5 = {}_9\mathrm{C}_5 = \underline{126\ (\text{通り})} \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

この「一般的な解法」のような飛躍的な発想をしなくても，樹形図を考えてみれば，この問題の答えが 問題 4. と同じになることなど「火を見るよりも明らか」である。

樹形図を用いた解法



$$\therefore \quad \sum^{6}\sum\sum k = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4!} = \underline{126\ (\text{通り})} \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

問題 6.　次の等式を満たす正の整数 p，q，r，s，t の組は何通りあるか。

$$p + q + r + s + t = 10$$

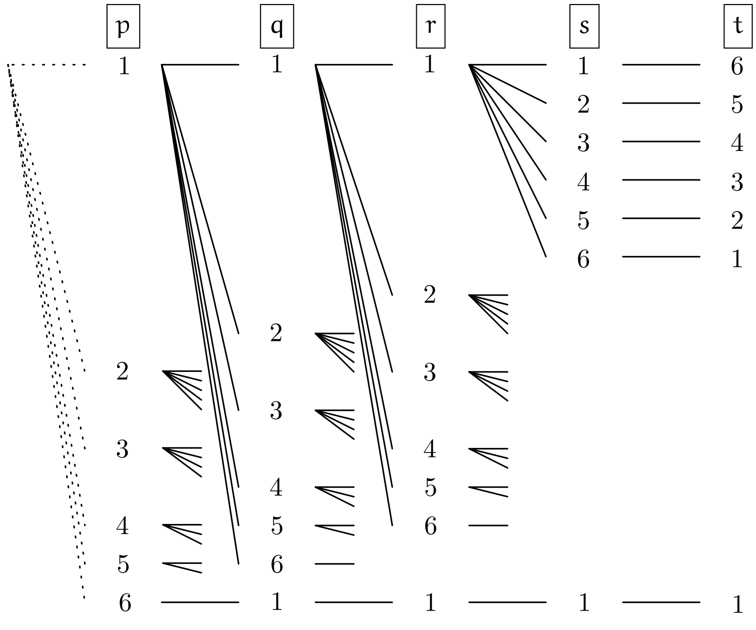
一般的な解法

p を色 a の球の個数，q を色 b の球の個数，r を色 c の球の個数，s を色 d の球の個数，そして t を色 e の球の個数とすれば，与式を満たす組は「a，b，c，d，e の 5 色の球から 10 個選ぶ方法」と一対一に対応する。ただし，「正の整数」という条件より，すべての球を少なくとも 1 個は選ばなければならないので，すべての色からあらかじめ球を 1 個ずつ選んでおく。そうすれば，残り 5 個の球は制約なく選ぶことができる。**すなわち，この問題は 問題 4. と同値である。**

$$\therefore \quad {}_5\mathrm{H}_5 = {}_9\mathrm{C}_5 = \underline{126\text{（通り）}} \cdots\cdots \boxed{答}$$

この「一般的な解法」のような飛躍的な発想をしなくても，樹形図を考えてみれば，この問題の答えが 問題 4. および 問題 5. と同じになることなど「火を見るよりも明らか」である。

樹形図を用いた解法



$$\therefore \quad \sum^{6}\sum\sum k = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4!} = \underline{126\text{（通り）}} \cdots\cdots \boxed{答}$$

問題 7.　次の不等式を満たす正の整数 p，q，r，s の組は何通りあるか。

$$p+q+r+s<10$$

一般的な解法その 1（ノーマルな解法だが，面倒）

問題 6. と同様の考え方で，以下の場合の数をそれぞれ別々に求める；

- $p+q+r+s=9$ を満たす組は ${}_4H_5={}_8C_5=56$
- $p+q+r+s=8$ を満たす組は ${}_4H_4={}_7C_4=35$
- $p+q+r+s=7$ を満たす組は ${}_4H_3={}_6C_3=20$
- $p+q+r+s=6$ を満たす組は ${}_4H_2={}_5C_2=10$
- $p+q+r+s=5$ を満たす組は ${}_4H_1={}_4C_1=4$
- $p+q+r+s=4$ を満たす組は ${}_4H_0={}_3C_0=1$
- $p+q+r+s\leqq 3$ を満たす組は存在しない

以上より，求める場合の数は　$56+35+20+10+4+1=\underline{126}$ <u>（通り）</u>$\cdots\cdots$ $\boxed{\text{答}}$

この問題の答えが 問題 4.～問題 6. と同じ「126 通り」となっているのは，もちろん偶然ではない。その理由は，次の解法をみれば明らかとなる。

一般的な解法その 2（すばらしい発想を用いる）

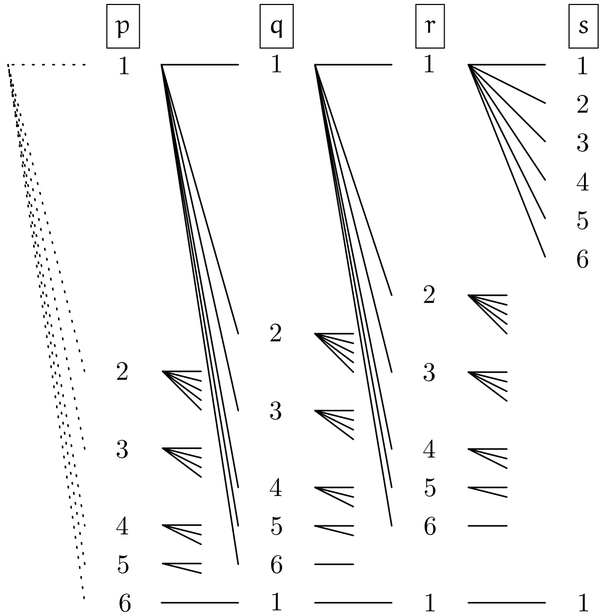
「p+q+r+s+t = 10 を満たす正の整数 t」を考える（すなわち，10 −（p+q+r+s）として得られる正の整数を t と置き，変数を増やして考えるのである）。すると，この問題は 問題 6. と同値である。

$$\therefore\quad {}_5H_5={}_9C_5=\underline{126\text{（通り）}}\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

私は，中学生の頃にこの解法を知ったときに「なんという突飛な発想をする天才がいるのだろう！ 凡人にはとても思いつくはずがない！」と感じたことを今でも覚えている。

しかし，「t という文字を自分で作り出す」というこのアイディアが実はそれほど突飛な発想ではないことが，ひとたび樹形図を描いてみればすぐに理解できる。また，それと同時に，「この問題は樹形図を描くだけであっさりと解答が導き出せる」ということにも気がつくであろう。

樹形図を用いた解法



$$\therefore \quad \sum^{6} \sum \sum k = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{4!} = \underline{126\text{（通り）}} \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

この樹形図を 問題 6. の樹形図と見比べれば，「問題 6. の t の部分がないだけで分岐の仕方は同じであること」は一目瞭然である。

そもそも 問題 6. においては，p，q，r，s の値が決まれば自動的に t の値が定まるため，s から t にかけては分岐が起きなかったのであった。

つまり見方によっては，この 問題 7. は「問題 6. の“無駄な部分”をそぎ落としてよりシンプルにした問題」とも言えるのである。

なお，この問題を考察することで得られる重複組合せ ${}_n\mathrm{H}_r$ の関係式について，最後の節に記した。(→§ 6.)

問題 8.　さいころを 4 回投げ，出た目を順に a，b，c，d とするとき，$a \geqq b \geqq c \geqq d$ となる場合の数を求めよ。

一般的な解法

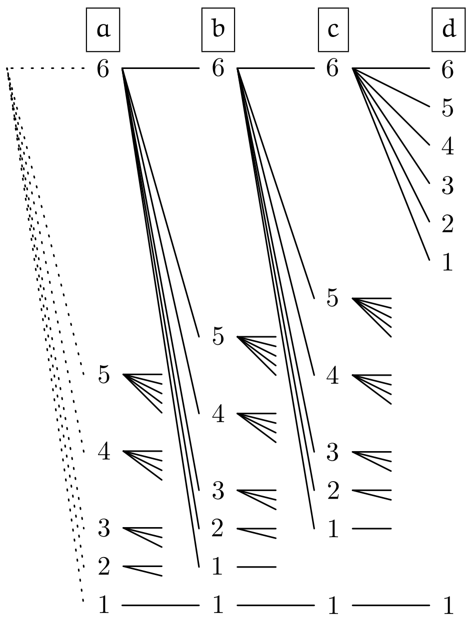
6 種類の目から重複を許して 4 個選ぶと，その 4 つの目を，大きい順に並び替えることができる。すなわち，「$a \geqq b \geqq c \geqq d$ となる目の出方」は「6 種類の目から重複を許して 4 個選ぶ方法」と一対一に対応する。よって

$$ {}_6H_4 = {}_9C_4 = \underline{126\text{（通り）}} \cdots\cdots \boxed{\text{答}} $$

授業でこのような説明をすると，大半の生徒は首をかしげる。この一対一対応を思いつくのが難しいのはもちろんのこと，柔軟な思考ができない生徒に理解させることも容易ではない。

しかし，いざ樹形図を描き始めれば，容易に答えが導かれる。

樹形図を用いた解法



$$ \therefore \quad \sum^{6} \sum \sum k = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{4!} = \underline{126\text{（通り）}} \cdots\cdots \boxed{\text{答}} $$

見ての通り，問題 4.〜問題 7. の樹形図と同じ形となり，そして同じ答えが出てくる。

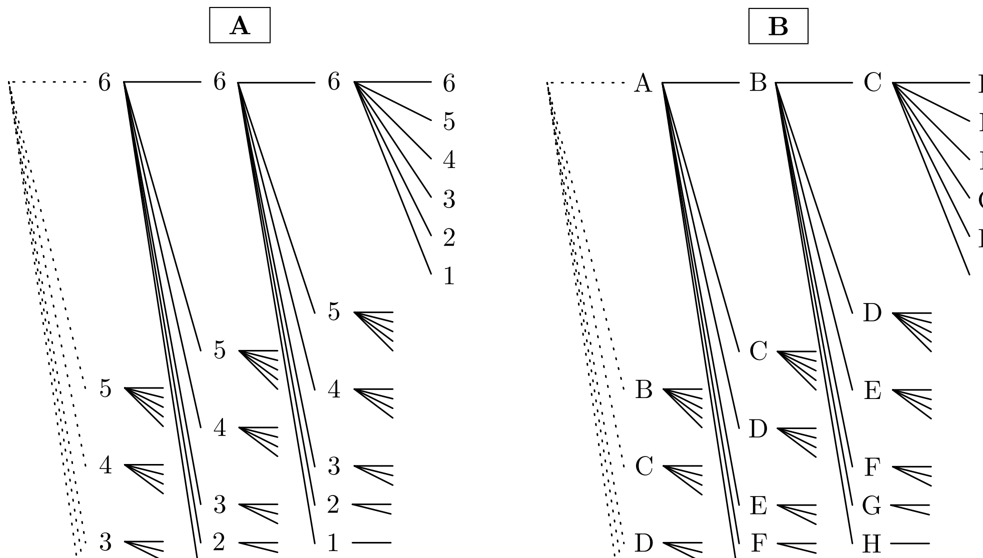
§ 5.　「数列」を未習の場合の教え方

ここまで，多重和が出てくるたびに，

$$\overbrace{\sum^{N}\sum\cdots\sum}^{p\ 個} k = \frac{N(N+1)\cdots(N+p)}{(p+1)!}$$

という公式を用いて場合の数を求めてきた。しかし，現行のカリキュラムでは「場合の数」は数学 A（高校 1 年相当），「数列」は数学 B（高校 2 年相当）に属しており，「場合の数」を教わる時点では「数列」をまだ学習していない。$\sum$ という記号すら知らない生徒に多重和の公式を教えることは無理であり無謀である。

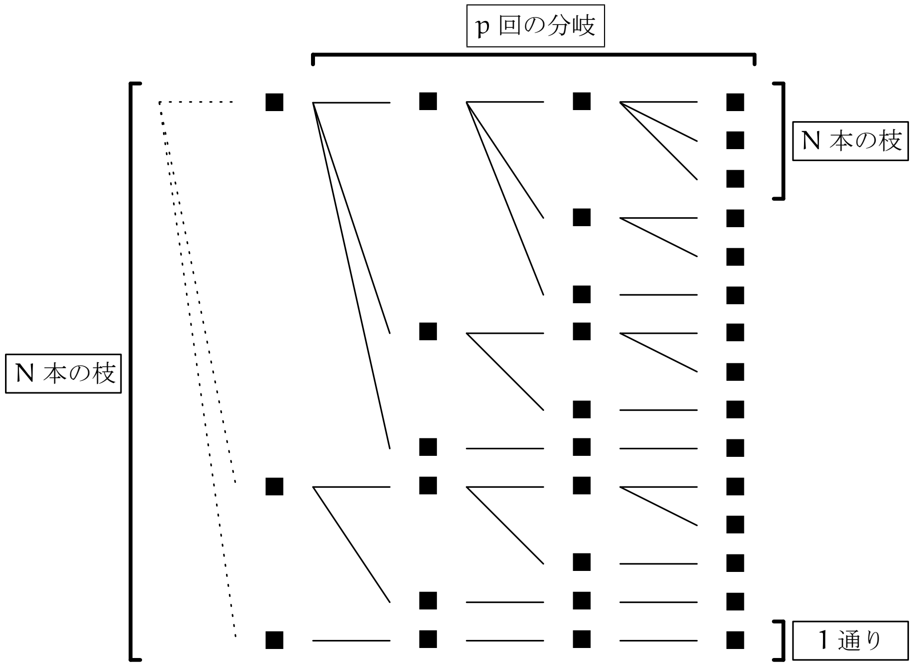
ただし，このような状況においても，この形の樹形図の数え方を教えることはできるのである。その方法を，前述の 問題 8. を例にとって説明しよう。



$\boxed{\mathbf{A}}$ は 問題 8. の樹形図，$\boxed{\mathbf{B}}$ は「A〜I の 9 文字から異なる 4 つを選ぶ」という問題の樹形図である。見ての通り，樹形図はまったく同じ形をしている。

このように，「場合の数を求めたい問題の樹形図」と同じ形の樹形図を持つ組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を見つければよいのである。

そしてその見つけ方は§ 3. で既に示した通り，次のようになる；



N，p を上図の通りとすると，求める場合の数は

$${}_{(N+p)}C_{(p+1)}\ （通り）$$

「上の形の樹形図から ${}_{(N+p)}C_{(p+1)}$ という式を導く過程」こそ数列の知識なしでは説明できないものの，「${}_{(N+p)}C_{(p+1)}$ の樹形図が上の形になること」は，具体的な例で試せば容易に確認できることである。さらに言えば，何度も樹形図を描いていればこの程度のことはそのうち感覚的に身に付くこととも言えるだろう。

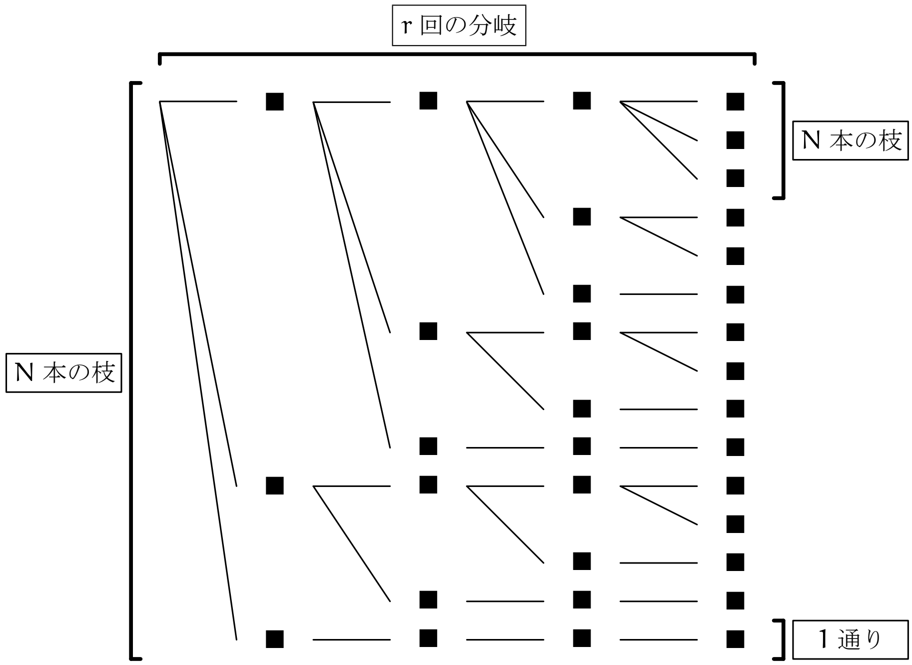
前ページのように樹形図を用いて場合の数を求めた場合は，解答は次のように記せばよい；

樹形図 $\boxed{\text{A}}$ と樹形図 $\boxed{\text{B}}$ は同じ形をしている。すなわち，求める組の総数は，「9 個のものから 4 個を選ぶ方法」の総数と一対一に対応する。

$$\therefore\quad {}_9C_4 = \underline{126\ （通り）} \cdots\cdots \boxed{答}$$

§ 6.　附記；${}_{n}\mathrm{H}_{r}$ の関係式

本稿では，2 つの定数 N，p を § 3. のように導入したが，それをほんの少しだけ修正して，2 つの定数 N，r を次のように導入することもできる；



N，r を上図の通りとすると，求める場合の数は

$$\overbrace{\sum^{N}\sum\cdots\sum}^{(r-1)\text{ 個}} k = \frac{N(N+1)\cdots(N+r-1)}{r!} = {}_{(N+r-1)}C_{r} = {}_{N}H_{r}\ \text{（通り）}$$

以上のことは，例えば 問題 3. のような単純な問題で確認すれば，きわめて自明（トリビアル）な結果と言える。

そもそも本稿では $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$ という和の計算から話を始めたが，さらに一歩遡って $\sum_{k=1}^{N} 1 = N$ から話を始めれば，次のようになる；

$$
\begin{aligned}
\sum^{N} 1 &= \frac{N}{1!} &&= {}_{N}C_1 = {}_{N}H_1 \\
\sum^{N}\sum 1 &= \frac{N(N+1)}{2!} &&= {}_{(N+1)}C_2 = {}_{N}H_2 \\
\sum^{N}\sum\sum 1 &= \frac{N(N+1)(N+2)}{3!} &&= {}_{(N+2)}C_3 = {}_{N}H_3 \\
\sum^{N}\sum\sum\sum 1 &= \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{4!} &&= {}_{(N+3)}C_4 = {}_{N}H_4 \\
\sum^{N}\sum\sum\sum\sum 1 &= \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}{5!} &&= {}_{(N+4)}C_5 = {}_{N}H_5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

このとき，前ページの樹形図の場合の数は，次のように求まる；

$$
\overbrace{\sum^{N}\sum\cdots\sum}^{r\text{ 個}} 1 = \frac{N(N+1)\cdots(N+r-1)}{r!} = {}_{(N+r-1)}C_r = {}_{N}H_r \text{（通り）}
$$

以上のことは「広く知られた事実」ではないと思われるので，公式として記しておこう；

${}_n\mathbf{H}_r$ の関係式①

$$
{}_nH_r = \overbrace{\sum^{n}\sum\cdots\sum}^{(r-1)\text{ 個}} k = \overbrace{\sum^{n}\sum\cdots\sum}^{r\text{ 個}} 1
$$

重複組合せ ${}_nH_r$ に関する公式をもう 1 つ述べる。

問題 7. の解法を比較することにより，次の関係式も直ちに得られる。

${}_n\mathbf{H}_r$ の関係式②

$$
{}_nH_r = {}_{(n-1)}H_0 + {}_{(n-1)}H_2 + \cdots + {}_{(n-1)}H_r = \sum_{k=0}^{r} {}_{(n-1)}H_k
$$

これは重複組合せの重要な関係式だと思うのだが，やはり広く知られているとは言い難い。