コンウェイの超現実数　その 1

参拾萬数学工房
(http://www.300000.net/)

はじめに

本稿は，数学小説『至福の超現実数』(Donald E. Knuth 著，松浦俊輔訳，柏書房，2004 年）の第 6 章まで（＋その後の章の一部）の内容に対し，行間を補ったものである。（以下，本稿ではこの本を「原著」と呼ぶ。）

原著の主人公 2 人，アリス（ⓐ）とビル（ⓑ）はあまりに物わかりがよく，残念なことに，私は彼らの理解のスピードにまったくついていけなかった。

ⓐ「わかったわ！ $x =$ ○○○ とおけば，さっきと同じ方法でうまくいくのよ！」

ⓑ「なるほど！」

このような場面が出てくるたび，私はこの本をスムーズに読み進めることができなくなった。原著には厳密な証明が一切載っていないので，「これは本当に正しいのだろうか？」と疑わしく感じたことも，たびたびあった。

そこで，各定理に対しての厳密な証明を，自分で書くことにしたのである。

なお，記号の使い方に関しては，自分自身の理解を助けるための処方として，以下のように，原著とは大幅に異なる書き換えをおこなった。

- 「集合」を表す文字の使い方は，原著とはまったく異なる。
- 等号・不等号は，「$<$，$=$，$>$」の代わりに「$\prec$，$\approx$，$\succ$」を用いた。
- 「超現実数」は，$\widehat{0}$，$\widehat{1}$ のように hat（帽子）をかぶせて，通常の数との違いを明確にした。また，具体的な数値は 2 進法で表した。

§ 1　大小関係（のようなもの）に関する前提

§ 1.1　前提

コンウェイによって定義された「超現実数（Surreal Numbers）」については次節で導入するが，その前に，超現実数同士の「大小関係（のようなもの）[1]」について，いくつかの

(1) 現時点では「超現実数」がどのような数なのかわかっていない以上，この大小関係が「我々の感覚と同じ大小関係」と同じ法則を持っているかどうか疑わしい。例えば，じゃんけんの勝敗を不等号で「チョキ＜グー」，「グー＜パー」，「パー＜チョキ」と表現した場合，これは推移律（$a < b$ かつ $b < c$ ならば，$a < c$）を満たさない。このようなことが起こってしまわないかどうか，疑わしいということである。

前提を述べておく。

本稿では，大小関係（のようなもの）を表す記号として，$<$，$=$，$>$ の代わりに $\prec$，$\approx$，$\succ$ を用いることにする[2] 。

以下，「数」とはすべて，次節で定義する「超現実数」を意味するものとする。

まず，2 数 a，b に対する「$a \prec b$」，「$a \approx b$」，「$a \succ b$」という 3 種類の大小関係（のようなもの）は，次の前提 1〜3 を満たすものとする。

前提 1（$\approx$ に関する推移律）

前提 1　3 数 a，b，c に対して，

- $a \approx b$ かつ $b \approx c \quad \Longrightarrow \quad a \approx c$

前提 2（左辺と右辺の入れ替え）

前提 2　2 数 a，b に対して，

- $a \prec b \quad \Longleftrightarrow \quad b \succ a$
- $a \approx b \quad \Longleftrightarrow \quad b \approx a$

前提 3（記号の定義）

前提 3　2 数 a，b に対して，

- 「$a \approx b$ でないこと」を，$a \not\approx b$ と表す。
- 「$a \prec b$ でないこと」を，$a \nprec b$（または $b \nsucc a$）と表す。
- 「$a \prec b$ または $a \approx b$ であること」を，$a \precsim b$ と表す。
- 「$a \nprec b$ かつ $a \not\approx b$ であること」を，$a \not\precsim b$ と表す。
- 「$a \nprec b$ かつ $a \nsucc b$ であること」を，$a \mathrel{\not\substack{\prec\\\succ}} b$ と表す。

注意 1　定義上，「$a \not\precsim b$」と「$a \prec b$」は同じ意味ではない。

注意 2　「$a \not\precsim b$」は「$a \precsim b$ の否定」であり，「$a \not\precsim b$ の否定」は「$a \precsim b$」である[3] 。

この前提だけしか与えられていない現段階においては，2 数 a，b の関係として，

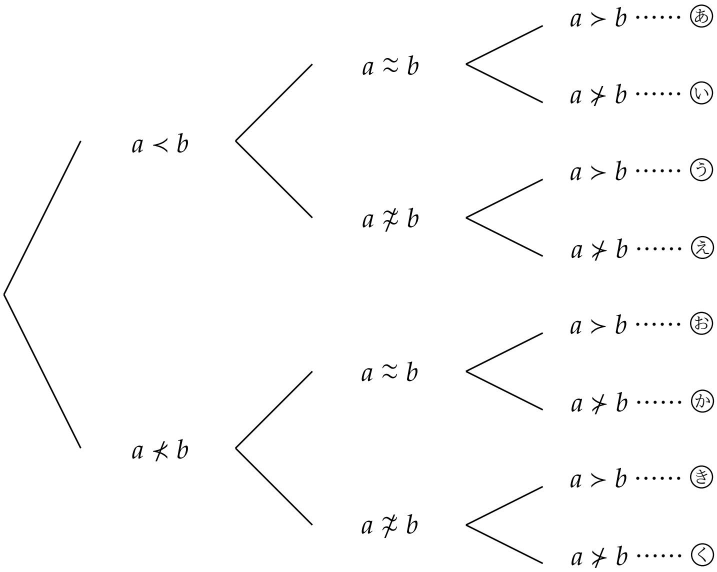
「$a \prec b$ か否か」，「$a \approx b$ か否か」，「$a \succ b$ か否か」

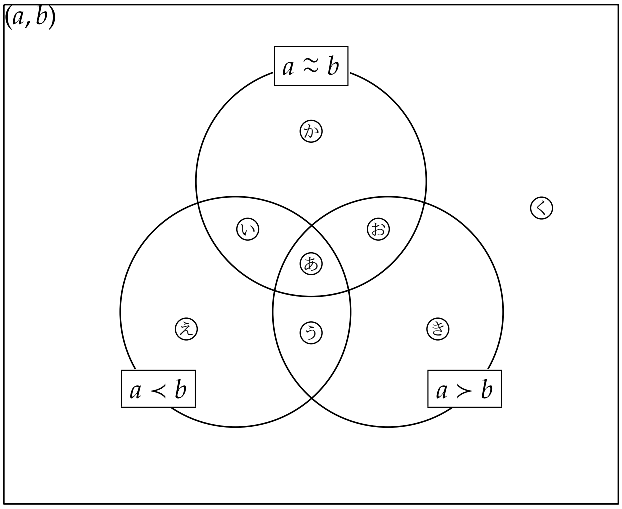
と考えると，$2^3 = 8$ 通りの場合があり得る。

---

(2) 本稿においては，極力「等しい」，「小さい」，「大きい」という表現は避けるよう努めたものの，しかしやむなく使ったところもある。

(3) ド・モルガンの法則。



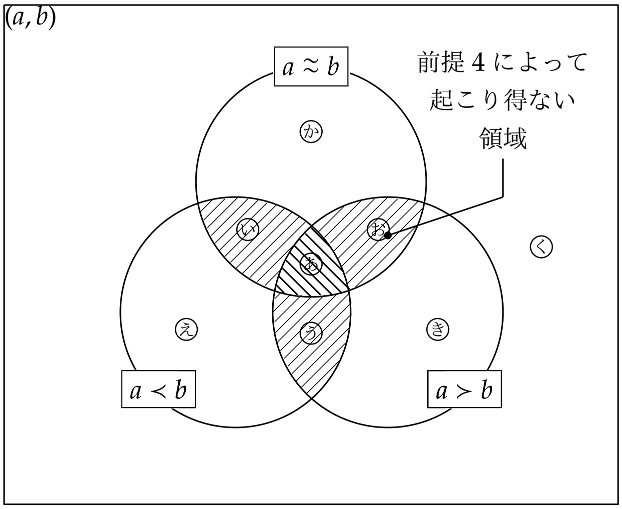


しかし，この状況のままでは以降の考察に支障をきたすので，もう 1 つ前提を追加する。

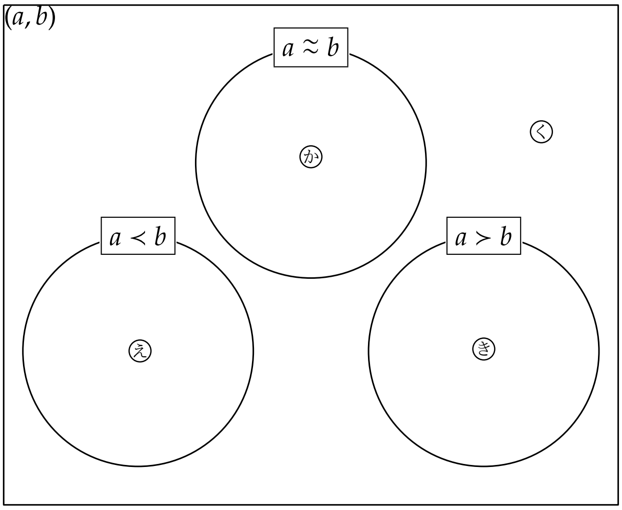
前提 4

$\boxed{\text{前提 4}}$　「$a \prec b$」,「$a \approx b$」,「$a \succ b$」の 2 つ以上を満たす 2 数の組 (a, b) は存在しない。

つまり，上の ㋐，㋑，㋒，㋔ を満たすような 2 数の組 (a, b) は存在しないものとする。



重なりが起こらないのであれば，そもそも領域が重ならないようにベン図を描いた方がよい。



前提 4 は，次のように言い換えられる。

前提 4′（前提 4 の言い換え）

前提 4’　2 数 a，b に対して，

- $a \prec b \implies a \not\succsim b$
- $a \approx b \implies a \not\lessgtr b$
- $a \succ b \implies a \not\precsim b$

次のことは，前提 3 と前提 4 から導かれる。

前提 3′（$a \prec b$，$a \approx b$，$a \succ b$ の必要十分条件）

前提 3’　2 数 a，b に対して，

- $a \prec b \quad \Longleftrightarrow \quad a \precsim b$ かつ $a \not\succsim b$
- $a \approx b \quad \Longleftrightarrow \quad a \precsim b$ かつ $a \succsim b$
- $a \succ b \quad \Longleftrightarrow \quad a \succsim b$ かつ $a \not\precsim b$

$a \prec b \quad \Longleftrightarrow \quad a \precsim b$ かつ $a \not\succsim b$ の証明

「$\Longrightarrow$」は，前提 3 と前提 4 から明らか。

また，「$\Longleftarrow$」は，前提 3 から明らか。（証明終）

$a \approx b \quad \Longleftrightarrow \quad a \precsim b$ かつ $a \succsim b$ の証明

「$\Longrightarrow$」は，前提 3 から明らか。

また，「$\Longleftarrow$」は，前提 3 と前提 4 から明らか。（証明終）

$a \succ b \quad \Longleftrightarrow \quad a \succsim b$ かつ $a \not\precsim b$ の証明

「$\Longrightarrow$」は，前提 3 と前提 4 から明らか。

また，「$\Longleftarrow$」は，前提 3 から明らか。（証明終）

§ 1.2　前提にはしないこと

逆に，前提としないことを列記しておく。実は，以下のものはすべて真であるが，わざわざ前提としておかなくても，論理的に導かれるのである。（本稿にて，以下のものは真であることを，すべて証明する。）

前提にはしないこと

- 「$a \prec b$ かつ $b \prec c \Longrightarrow a \prec c$」の真偽。
- 「$x \approx x$」の真偽。
- ⧀を満たす 2 数の組 (a,b)（つまり，$a \nprec b$ かつ $a \not\approx b$ かつ $a \nsucc b$ である (a,b)）が存在しないことの真偽。すなわち，前提 4′ の逆の真偽。具体的には，
  - ◇「$a \not\succsim b \quad \Longrightarrow \quad a \prec b$」の真偽。
  - ◇「$a \not\lessgtr b \quad \Longrightarrow \quad a \approx b$」の真偽。
  - ◇「$a \not\precsim b \quad \Longrightarrow \quad a \succ b$」の真偽。

§ 1.3　集合に対する不等号の定義

以下，集合の要素はすべて「数（すなわち超現実数)」とする。

集合に対する不等号の定義 I（数と集合との関係）

数 x と集合 A において，

- 「すべての $a \in A$ に対して $a \prec x$ であること」を，$A \prec x$ と表す。
- 「すべての $a \in A$ に対して $x \prec a$ であること」を，$x \prec A$ と表す。

- 「すべての $a \in A$ に対して $a \precsim x$ であること」を，$A \precsim x$ と表す。
- 「すべての $a \in A$ に対して $x \precsim a$ であること」を，$x \precsim A$ と表す。

- 「すべての $a \in A$ に対して $a \not\precsim x$ であること」を，$A \not\precsim x$ と表す。
- 「すべての $a \in A$ に対して $x \not\precsim a$ であること」を，$x \not\precsim A$ と表す。

注意 3　「$A \not\precsim x$」と「$A \prec x$」は同じ意味ではない。

注意 4　「$A \precsim x$ の否定」は「$A \not\precsim x$」ではない。

「$A \precsim x$ の否定」は「$a \precsim x$ を満たさない $a \in A$（すなわち，$a \not\precsim x$ を満たす $a \in A$）が少なくとも 1 つ存在する」である。

また，「$A \not\precsim x$ の否定」は「$a \not\precsim x$ を満たさない $a \in A$（すなわち，$a \precsim x$ を満たす $a \in A$）が少なくとも 1 つ存在する」である。

集合に対する不等号の定義 II（2 つの集合の関係）

2 つの集合 A，B において，

- 「すべての $a \in A$，すべての $b \in B$ に対して $a \prec b$ であること」を，$A \prec B$ と表す。
- 「すべての $a \in A$，すべての $b \in B$ に対して $a \precsim b$ であること」を，$A \precsim B$ と表す。
- 「すべての $a \in A$，すべての $b \in B$ に対して $a \not\precsim b$ であること」を，$A \not\precsim B$ と表す。

注意 5　「$A \not\precsim B$」と「$A \prec B$」は同じ意味ではない。

注意 6　「$A \precsim B$ の否定」は「$A \not\precsim B$」ではない。

「$A \precsim B$ の否定」は「$a \precsim b$ を満たさない $a \in A$，$b \in B$（すなわち，$a \not\precsim b$ を満たす $a \in A$）が少なくとも 1 組存在する」である。

また，「$A \not\precsim B$ の否定」は「$a \not\precsim b$ を満たさない $a \in A$，$b \in B$（すなわち，$a \precsim b$ を満たす $a \in A$，$b \in B$）が少なくとも 1 つ存在する」である。

§ 1.4　空集合原理

空集合 $\emptyset$ について述べる。「すべての $a \in A$ に対して〇〇である」という命題は，$A = \emptyset$ であるとき常に真になる[(4)]。なぜなら，空集合 $\emptyset$ は 1 つも要素を含まないので，「条件〇〇を満たさない $a \in A$」が存在しないからである。この事実を，本稿では「空集合原理」と呼ぶことにする。

空集合原理

$\boxed{\text{空集合原理}}$　任意の数 x に対して，

$$x \prec \emptyset \quad , \quad \emptyset \prec x$$
$$x \precsim \emptyset \quad , \quad \emptyset \precsim x$$
$$x \not\precsim \emptyset \quad , \quad \emptyset \not\precsim x$$

が成り立つ。

また，任意の集合 A に対して，

$$A \prec \emptyset \quad , \quad \emptyset \prec A$$
$$A \precsim \emptyset \quad , \quad \emptyset \precsim A$$
$$A \not\precsim \emptyset \quad , \quad \emptyset \not\precsim A$$

が成り立つ。

空集合原理を踏まえると，「数と集合との関係」と，「2 つの集合の関係」に関しては，次のように言い換えることができる。

---

(4)　「〇〇」が否定形で表されているときを含む。

集合に対する不等号の定義 I′（数と集合との関係）

数 x と集合 A において，

- 「$a \prec x$ を満たさない $a \in A$（すなわち $a \nprec x$ を満たす $a \in A$）が存在しないこと」を，$A \prec x$ と表す。
- 「$x \prec a$ を満たさない $a \in A$（すなわち $x \nprec a$ を満たす $a \in A$）が存在しないこと」を，$x \prec A$ と表す。

- 「$a \precsim x$ を満たさない $a \in A$（すなわち $a \not\precsim x$ を満たす $a \in A$）が存在しないこと」を，$A \precsim x$ と表す。
- 「$x \precsim a$ を満たさない $a \in A$（すなわち $x \not\precsim a$ を満たす $a \in A$）が存在しないこと」を，$x \precsim A$ と表す。

- 「$a \not\precsim x$ を満たさない $a \in A$（すなわち $a \precsim x$ を満たす $a \in A$）が存在しないこと」を，$A \not\precsim x$ と表す。
- 「$x \not\precsim a$ を満たさない $a \in A$（すなわち $x \precsim a$ を満たす $a \in A$）が存在しないこと」を，$x \not\precsim A$ と表す。

集合に対する不等号の定義 II（2 つの集合の関係）

2 つの集合 A，B において，

- 「$a \prec b$ を満たさない $a \in A$，$b \in B$ の組 (a,b)（すなわち，$a \nprec b$ を満たす $a \in A$，$b \in B$ の組 (a,b)）が存在しないこと」を，$A \prec B$ と表す。

- 「$a \precsim b$ を満たさない $a \in A$，$b \in B$ の組 (a,b)（すなわち，$a \not\precsim b$ を満たす $a \in A$，$b \in B$ の組 (a,b)）が存在しないこと」を，$A \precsim B$ と表す。

- 「$a \not\precsim b$ を満たさない $a \in A$，$b \in B$ の組 (a,b)（すなわち，$a \precsim b$ を満たす $a \in A$，$b \in B$ の組 (a,b)）が存在しないこと」を，$A \not\precsim B$ と表す。

§2　数の生成と大小関係

§2.1　定義 1，定義 2

定義 1，定義 2

$\boxed{\text{定義 1}}$（数の生成の定義）

$L_x \not\gtrsim R_x$ を満たす 2 つの集合 L_x，R_x に対して

$$x := (\, L_x : R_x \,)$$

を超現実数と呼ぶ。

$\boxed{\text{定義 2}}$（数の大小関係の定義）

2 数 $x := (\, L_x : R_x \,)$，$y := \left(L_y : R_y \right)$ に対して，$x \lesssim y$ とは，

$$L_x \not\gtrsim y \quad \text{かつ} \quad x \not\gtrsim R_y$$

を満たすことである。

定義 1 に関して，L_x を「超現実数 x を生成する左集合」，R_x を「超現実数 x を生成する右集合」と呼ぶことにする。また，x を「左集合 L_x と右集合 R_x によって生成される超現実数」と呼ぶことにする。

以下，「数」と言えば「超現実数」を表すことにする。個数や序数などと区別するために，超現実数には $\widehat{0}$，$\widehat{1}$ のように $\overset{\text{帽子}}{\text{hat}}$ をかぶせることにする。

記号「:=」について補足しておく。「$x := (\, L_x : R_x \,)$」は，x が左集合 L_x と右集合 R_x（ただし $L_x \not\gtrsim R_x$）によって生成された数であるを意味する。

「:=」と「≈」は同じ意味ではないことに注意されたい。例えば，数 x が左集合 L_x と右集合 R_x によって生成され，数 y が左集合 L_y と右集合 R_y によって生成されるとき，すなわち

$$x := (\, L_x : R_x \,), \qquad y := \left(L_y : R_y \right)$$

であるとき，仮に $x \approx y$ であったとしても

$$x := \left(L_y : R_y \right), \qquad y := (\, L_x : R_x \,)$$

とは表記しない。（その場合は

$$x \approx \left(L_y : R_y \right), \qquad y \approx (\, L_x : R_x \,)$$

と表記する。）

§ 2.2　数 $\widehat{0}$ の定義（数の生成の第 1 日目）

最初の数は，空集合 $\emptyset$ から生成される。なぜなら，まだ数が 1 個も数が生成されていない状態では，数を要素に持つ集合が存在しないためである。

第 1 日目に生成される数は，左集合 $\emptyset$，右集合 $\emptyset$ から生成される

$$(\emptyset : \emptyset)$$

しかない[5]。この数を，$\widehat{0}$ と名付ける。

数 $\widehat{\mathbf{0}}$ の定義

- $\widehat{0} := (\emptyset : \emptyset)$

$\boxed{\widehat{0} \approx \widehat{0} \text{ であることの証明}}$[6]

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{0}$，$y = \widehat{0}$ とするとき，$L_x = R_x = L_y = R_y = \emptyset$ であるから，

$$\emptyset \not\gtrsim \widehat{0} \quad \text{かつ} \quad \widehat{0} \not\gtrsim \emptyset$$

より

$$L_x \not\gtrsim y \quad \text{かつ} \quad x \not\gtrsim R_y$$

を満たしている。ゆえに $\widehat{0} \lesssim \widehat{0}$ である。

ここで，仮に $\widehat{0} < \widehat{0}$ であったとすると，前提 2 より $\widehat{0} > \widehat{0}$ でもあるが，この 2 つが成り立つことは前提 4 に矛盾する。故に $\widehat{0} \not< \widehat{0}$ である。

$\widehat{0} \lesssim \widehat{0}$ かつ $\widehat{0} \not< \widehat{0}$ より，$\widehat{0} \approx \widehat{0}$ である。（証明終）

§ 2.3　数 $\widehat{-1}$，$\widehat{1}$ の定義（数の生成の第 2 日目）

第 2 日目に生成される数は，$\left(\emptyset : \left\{\widehat{0}\right\}\right)$ と $\left(\left\{\widehat{0}\right\} : \emptyset\right)$ の 2 個しかない。

数 $\widehat{\mathbf{-1}}$，$\widehat{\mathbf{1}}$ の定義

- $\widehat{-1} := \left(\emptyset : \left\{\widehat{0}\right\}\right)$
- $\widehat{1} := \left(\left\{\widehat{0}\right\} : \emptyset\right)$

(5) 空集合原理より $\emptyset \not\gtrsim \emptyset$ であるから，定義 1 より $(\emptyset : \emptyset)$ は数である。

(6) のちほど，任意の数 x に対して $x \approx x$ であることを示す（→定理 3′）。

$\boxed{\widehat{-1} < \widehat{0}\text{ であることの証明}}$

まず，$\widehat{-1} \lesssim \widehat{0}$ であることを示す。

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{-1}$，$y = \widehat{0}$ とするとき，$L_x = L_y = R_y = \emptyset$，$R_x = \left\{\widehat{0}\right\}$ である。

$$\emptyset \not\gtrsim \widehat{0} \quad \text{かつ} \quad \widehat{-1} \not\gtrsim \emptyset$$

より，$L_x \not\gtrsim y$ かつ $x \not\gtrsim R_y$ を満たしている。ゆえに，$\widehat{-1} \lesssim \widehat{0}$ である。

次に，$\widehat{-1} \not\gtrsim \widehat{0}$ であることを示す。

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{0}$，$y = \widehat{-1}$ とするとき，$L_x = R_x = L_y = \emptyset$，$R_y = \left\{\widehat{0}\right\}$ である。

仮に，$\widehat{0} \lesssim \widehat{-1}$ であるとすると，定義 2 より

$$\emptyset \not\gtrsim \widehat{-1} \quad \text{かつ} \quad \widehat{0} \not\gtrsim \left\{\widehat{0}\right\}$$

となるが，後者は $\widehat{0} \approx \widehat{0}$ であることと矛盾する。ゆえに，$\widehat{0} \lesssim \widehat{-1}$ ではない。すなわち $\widehat{-1} \not\gtrsim \widehat{0}$ である。

以上より，$\widehat{-1} \lesssim \widehat{0}$ かつ $\widehat{-1} \not\gtrsim \widehat{0}$ であることが示されたので，前提 $3'$ より $\widehat{-1} < \widehat{0}$ である。

（証明終）

$\boxed{\widehat{0} < \widehat{1}\text{ であることの証明}}$

まず，$\widehat{0} \lesssim \widehat{1}$ であることを示す。

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{0}$，$y = \widehat{1}$ とするとき，$L_x = R_x = R_y = \emptyset$，$L_y = \left\{\widehat{0}\right\}$ である。

$$\emptyset \not\gtrsim \widehat{1} \quad \text{かつ} \quad \widehat{0} \not\gtrsim \emptyset$$

より，$L_x \not\gtrsim y$ かつ $x \not\gtrsim R_y$ を満たしている。ゆえに，$\widehat{0} \lesssim \widehat{1}$ である。

次に，$\widehat{0} \not\gtrsim \widehat{1}$ であることを示す。

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{1}$，$y = \widehat{0}$ とするとき，$R_x = L_y = R_y = \emptyset$，$L_x = \left\{\widehat{0}\right\}$ である。

仮に，$\widehat{1} \lesssim \widehat{0}$ であるとすると，定義 2 より

$$\left\{\widehat{0}\right\} \not\gtrsim \widehat{0} \quad \text{かつ} \quad \widehat{0} \not\gtrsim \emptyset$$

となるが，前者は $\widehat{0} \approx \widehat{0}$ であることと矛盾する。ゆえに，$\widehat{1} \lesssim \widehat{0}$ ではない。すなわち $\widehat{0} \not\gtrsim \widehat{1}$ である。

以上より，$\widehat{0} \lesssim \widehat{1}$ かつ $\widehat{0} \not\gtrsim \widehat{1}$ であることが示されたので，前提 $3'$ より $\widehat{0} < \widehat{1}$ である。

（証明終）

$\boxed{\widehat{-1} < \widehat{1} \text{ であることの証明}}$

まず，$\widehat{-1} \precsim \widehat{1}$ であることを示す。

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{-1}$，$y = \widehat{1}$ とするとき，$L_x = R_y = \emptyset$，$R_x = L_y = \left\{\widehat{0}\right\}$ である。

$$\emptyset \not\succsim \widehat{1} \quad \text{かつ} \quad \widehat{-1} \not\succsim \emptyset$$

より，$L_x \not\succsim y$ かつ $x \not\succsim R_y$ を満たしている。ゆえに，$\widehat{-1} \precsim \widehat{1}$ である。

次に，$\widehat{-1} \not\succsim \widehat{1}$ であることを示す。

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{1}$，$y = \widehat{-1}$ とするとき，$R_x = L_y = \emptyset$，$L_x = R_y = \left\{\widehat{0}\right\}$ である。

仮に，$\widehat{1} \precsim \widehat{-1}$ であるとすると，定義 2 より

$$\left\{\widehat{0}\right\} \not\succsim \widehat{-1} \quad \text{かつ} \quad \widehat{1} \not\succsim \left\{\widehat{0}\right\}$$

となるが，前者は $\widehat{-1} < \widehat{0}$ であることと矛盾し，後者は $\widehat{0} < \widehat{1}$ であることと矛盾する。ゆえに，$\widehat{1} \precsim \widehat{-1}$ ではない。すなわち $\widehat{-1} \not\succsim \widehat{1}$ である。

以上より，$\widehat{-1} \precsim \widehat{1}$ かつ $\widehat{-1} \not\succsim \widehat{1}$ であることが示されたので，前提 3′ より $\widehat{-1} < \widehat{1}$ である。

（証明終）

補題 1

補題 1　R_a，L_b がそれぞれ集合であるとき，$a := (\emptyset : R_a)$，$b := (L_b : \emptyset)$ は数であり，かつ $a \precsim b$ である。

補題 1 の証明

$a = (\emptyset : A)$，$b = (B : \emptyset)$ が数であることは定義 1 と空集合原理から明らかなので，$a \precsim b$ のみ示す。

定義 2 における 2 数 x，y を $x = a$，$y = b$ とするとき，$L_x = R_y = \emptyset$ である。そして，空集合原理より

$$\emptyset \not\succsim b \quad \text{かつ} \quad a \not\succsim \emptyset$$

であるから，$L_x \not\succsim y$ かつ $x \not\succsim R_y$ を満たしている。ゆえに，$a \precsim b$ である。　（証明終）

補題 2

補題 2

- $a := (\emptyset : R_a) \Longrightarrow a \precsim \widehat{0}$
- $b := (L_b : \emptyset) \Longrightarrow \widehat{0} \precsim b$

補題 2 の証明

前者は，補題 1 の $L_b = \emptyset$ の場合，後者は，補題 1 の $R_a = \emptyset$ の場合である。　（証明終）

§ 2.4　大小関係に関する諸定理

定理 1（推移律）

定理 1（推移律）　3 数 x，y，z に対して，

- $x \lesssim y$ かつ $y \lesssim z \implies x \lesssim z$

定理 1 の証明

背理法で示す。仮に，3 数 $x := (L_x : R_x)$，$y := \left(L_y : R_y\right)$，$z := (L_z : R_z)$ が

$$x \lesssim y \quad \text{かつ} \quad y \lesssim z \quad \text{かつ} \quad x \not\lesssim z$$

を満たしているとする。この関係が成り立つ 3 数の組 (x, y, z) を「悪い数の組」と呼ぶことにする。

$x \lesssim y$ と $y \lesssim z$ より

$$L_x \not\gtrsim y \quad \text{かつ} \quad x \not\gtrsim R_y \quad \text{かつ} \quad L_y \not\gtrsim z \quad \text{かつ} \quad y \not\gtrsim R_z$$

である。

また $x \not\lesssim z$ より「$L_x \not\gtrsim z$ ではない」または「$x \not\gtrsim R_z$ ではない」ので，

「$z \lesssim \ell_x$ となる $\ell_x \in L_x$ が存在する」または「$r_z \lesssim x$ となる $r_z \in R_z$ が存在する」

が成り立つ。

- $z \lesssim \ell_x$ となる $\ell_x \in L_x$ が存在する場合，
  $L_x \not\gtrsim y$ より $y \not\lesssim \ell_x$ であるから，
  $$y \lesssim z \quad \text{かつ} \quad z \lesssim \ell_x \quad \text{かつ} \quad y \not\lesssim \ell_x$$
  となり，3 数 (y, z, ℓ_x) は「悪い数の組」である。
- $r_z \lesssim x$ となる $r_z \in R_z$ が存在する場合，
  $y \not\gtrsim R_z$ より $r_z \not\lesssim y$ であるから，
  $$r_z \lesssim x \quad \text{かつ} \quad x \lesssim y \quad \text{かつ} \quad r_z \not\lesssim y$$
  となり，3 数 (r_z, x, y) は「悪い数の組」である。

ここで，ℓ_x は x より，r_z は z より年長（z より前に生まれた数）である。したがって，この手順を繰り返せば，それ以前の日目（過去）にどこまでも遡って，より年長の「悪い数の組」が無限に見つかることになる。しかしこれは，数の生成には「空集合 $\emptyset$ から数 $\widehat{0}$ を生成する」という「始まり（第 1 日目）」があることに矛盾する。

以上より，$x \not\lesssim z$ ではないこと，すなわち $x \lesssim z$ であることが示された。　（証明終）

定理 2，定理 3

$\boxed{\text{定理 2}}$ 任意の数 $x := (L_x : R_x)$ に対して，

- $L_x \lesssim x$ かつ $x \lesssim R_x$

$\boxed{\text{定理 3}}$ 任意の数 $x := (L_x : R_x)$ に対して，

- $x \lesssim x$

先に定理 3 を示し，それを利用して定理 2 を示す。

$\boxed{\text{定理 3 の証明}}$

背理法で示す。$x \not\lesssim x$ となる数 x が存在すると仮定する。このような x を「悪い数」と呼ぶことにする。このとき，「$L_x \not\gtrsim x$ ではない」または「$x \not\gtrsim R_x$ ではない」である。

- $L_x \not\gtrsim x$ ではないと仮定すると，
  $x \lesssim \ell_x$ を満たす $\ell_x \in L_x$ が存在する。
  ここで，$\ell_x := (L_{\ell_x} : R_{\ell_x})$ とおき，$x \lesssim \ell_x$ に定義 2 を適用すれば
  $$L_x \not\gtrsim \ell_x \quad \text{かつ} \quad x \not\gtrsim R_{\ell_x}$$
  となる。前者より $\ell_x \not\gtrsim \ell_x$（すなわち $\ell_x \not\lesssim \ell_x$）が導かれる。このことは，$\ell_x$ が「悪い数」であることを意味する。
- $x \not\gtrsim R_x$ ではないと仮定すると，
  $r_x \lesssim x$ を満たす $r_x \in R_x$ が存在する。
  ここで，$r_x := (L_{r_x} : R_{r_x})$ とおき，$r_x \lesssim x$ に定義 2 を適用すれば
  $$L_{r_x} \not\gtrsim x \quad \text{かつ} \quad r_x \not\gtrsim R_x$$
  となる。後者より $r_x \not\gtrsim r_x$（すなわち $r_x \not\lesssim r_x$）が導かれる。このことは，r_x が「悪い数」であることを意味する。

ここで，ℓ_x または r_x は，いずれも x より年長（x より前に生まれた数）ある。したがって，この手順を繰り返せば，それ以前の日目（過去）にどこまでも遡って，より年長の「悪い数」が無限に見つかることになる。しかしこれは，数の生成には「空集合 $\emptyset$ から数 $\widehat{0}$ を生成する」という「始まり（第 1 日目）」があることに矛盾する。

以上より，$x \not\lesssim x$ となる数 x は存在しない。すなわち，任意の数 x は $x \lesssim x$ を満たす。

（証明終）

$\boxed{\text{定理 2 の前者（}L_x \lesssim x\text{）の証明}}$

背理法で示す。

ある数 x に対して，$\ell_x \not\lesssim x$ となる数 $\ell_x \in L_x$ が存在すると仮定する。このような x を「悪い数」と呼ぶことにする。

ここで，$\ell_x := (L_{\ell_x} : R_{\ell_x})$ とおき，$\ell_x \not\lesssim x$ に定義 2 を適用すれば

$$L_{\ell_x} \not\gtrsim x \text{ ではない} \quad \text{または} \quad \ell_x \not\gtrsim R_x \text{ ではない},$$

すなわち

$$x \lesssim \ell_{\ell_x} \text{ となる } \ell_{\ell_x} \in L_{\ell_x} \text{ が存在する} \cdots\cdots \text{[A]}$$
$$\text{または}$$
$$r_x \lesssim \ell_x \text{ となる } r_x \in R_x \text{ が存在する} \cdots\cdots \text{[B]}$$

となる。しかし，[A] も [B] も起こりえない。それを以下で示す。

[A] が偽であることの証明

背理法で示す。

まず，$x \lesssim \ell_{\ell_x}$ となる $\ell_{\ell_x} \in L_{\ell_x}$ が存在する場合には，$\ell_{\ell_x} \not\lesssim \ell_x$ であることを，背理法で示す。

$\ell_{\ell_x} \not\lesssim \ell_x$ であることの証明

背理法で示す。

$\ell_{\ell_x} \lesssim \ell_x$ を満たすと仮定する。このとき，定理 1（推移律）より $x \lesssim \ell_x$ となる。これは

$$L_x \not\gtrsim \ell_x \quad \text{かつ} \quad x \not\gtrsim L_{\ell_x}$$

を意味するが，しかし前者は $\ell_x \lesssim \ell_x$（$\because$ 定理 3）に矛盾するので，これはあり得ない。よって，$x \lesssim \ell_x$ ではない。

したがって，$\ell_{\ell_x} \not\lesssim \ell_x$ である。

ところで，このことは，ℓ_x が「悪い数」であることを意味する。

ここで，ℓ_x は x より年長（x より前に生まれた数）である。したがって，この手順を繰り返せば，それ以前の日目（過去）にどこまでも遡って，より年長の「悪い数」が無限に見つかることになる。しかしこれは，数の生成には「空集合 $\emptyset$ から数 $\widehat{0}$ を生成する」という「始まり（第 1 日目）」があることに矛盾する。

したがって，$\ell_{\ell_x} \not\lesssim \ell_x$ ではあり得ない。

以上より，$x \lesssim \ell_{\ell_x}$ となる $\ell_{\ell_x} \in L_{\ell_x}$ は存在しない。

[B] が偽であることの証明

x は定義 1 を満たす数であるから，$r_x \lesssim \ell_x$ となる $r_x \in R_x$ は存在し得ない。

以上より，$\ell_x \not\lesssim x$ となる数 $\ell_x \in L_x$ は存在しない。

すなわち，$L_x \lesssim x$ である。（証明終）

$\boxed{\text{定理 2 の後者（}x \lesssim R_x\text{）の証明}}$

前者（$L_x \lesssim x$）と同様に示される。（証明割愛）

定理 3′

定理 3' 任意の数 $x := (L_x : R_x)$ に対して，
- $x \approx x$

定理 3′ の証明 （この証明は，$\widehat{0} \precsim \widehat{0}$ から $\widehat{0} \approx \widehat{0}$ を導いたときとまったく同一である。）

まず，定理 3 より，$x \precsim x$ である。

ここで，仮に $x < x$ であったとすると，前提 2 より $x > x$ でもあるが，この 2 つが成り立つことは前提 4 に矛盾する。故に $x \nless x$ である。

$x \precsim x$ かつ $x \nless x$ より，$x \approx x$ である。（証明終）

定理 4

定理 4 2 数 x，y に対して，
- $x \not\succsim y \quad \Longrightarrow \quad x \precsim y$

定理 4 の証明

$x \not\succsim y$，すなわち $y \not\precsim x$ より「$L_y \not\succsim x$ ではない」または「$y \not\succsim R_x$ ではない」ので，

「$x \precsim y_L$ となる $y_L \in L_y$ が存在する」または「$r_x \precsim y$ となる $r_x \in R_x$ が存在する」

が成り立つ。

- $x \precsim y_L$ となる $y_L \in L_y$ が存在する場合，
  定理 2 より $y_L \precsim y$ であるから，定理 1（推移律）より $x \precsim y$
- $r_x \precsim y$ となる $r_x \in R_x$ が存在する が存在する場合，
  定理 2 より $x \precsim r_x$ であるから，定理 1（推移律）より $x \precsim y$

（証明終）

定理 4a，定理 4b，定理 4c（定理 4 の系）

定理 4a 2 数 x，y に対して，
- $x \not\succsim y \quad \Longrightarrow \quad x < y$

定理 4b 数 x と集合 A に対して，
- $x \not\succsim A \quad \Longrightarrow \quad x < A$
- $A \not\succsim x \quad \Longrightarrow \quad A < x$

定理 4c 2 つの集合 A，B に対して，
- $A \not\succsim B \quad \Longrightarrow \quad A < B$

定理 4a の証明

$x \not\gtrsim y$ ならば，定理 4 より $x \lesssim y$ である。

よって，$x \not\gtrsim y$ かつ $x \lesssim y$ であるから，前提 3′ より $x \prec y$ である。（証明終）

定理 4b，定理 4c の証明

定理 4a より明らか。（証明終）

また，これらの逆も成り立つ。

定理 4a の逆，定理 4b の逆，定理 4c の逆

定理 4a の逆　2 数 x，y に対して，

- $x \prec y \quad \Longrightarrow \quad x \not\gtrsim y$

定理 4b の逆　数 x と集合 A に対して，

- $x \prec A \quad \Longrightarrow \quad x \not\gtrsim A$
- $A \prec x \quad \Longrightarrow \quad A \not\gtrsim x$

定理 4c の逆　2 つの集合 A，B に対して，

- $A \prec B \quad \Longrightarrow \quad A \not\gtrsim B$

定理 4a の逆の証明

これは前提 4′ と同じ主張である。（証明終）

定理 4b の逆，定理 4c の逆の証明

定理 4a の逆より明らか。（証明終）

以上，定理 4a〜4c およびそれらの逆から，定理 4 は次のように言い換えることができる。

定理 4′（定理 4 の必要十分化）

定理 4’a　2 数 x，y に対して，

- $x \not\gtrsim y \quad \Longleftrightarrow \quad x \prec y$

定理 4’b　数 x と集合 A に対して，

- $x \not\gtrsim A \quad \Longleftrightarrow \quad x \prec A$
- $A \not\gtrsim x \quad \Longleftrightarrow \quad A \prec x$

定理 4’c　2 つの集合 A，B に対して，

- $A \not\gtrsim B \quad \Longleftrightarrow \quad A \prec B$

定理 4a の系 1

定理 4a の系 1　2 数 x，y に対して，

$$x \nprec y \quad \text{かつ} \quad x \not\approx y \quad \text{かつ} \quad x \nsucc y$$

を満たす 3 数の組 (x, y, z) は存在しない。

定理 4a の系 1 の証明

定理 4a より明らか。　（証明終）

定理 4a の系 2

定理 4a の系 2　2 数 x，y に対して，

- $x \not\lessgtr y \iff x \approx y$

定理 4a の系 2 の証明

「$\Longrightarrow$」は，系 1 より明らか。

また，「$\Longleftarrow$」は，前提 4′ そのものである。　（証明終）

定理 5, 定理 6（推移律）

定理 5（推移律）　3 数 x，y，z に対して，

- $x \prec y$ かつ $y \precsim z \implies x \prec z$

定理 6（推移律）　3 数 x，y，z に対して，

- $x \precsim y$ かつ $y \prec z \implies x \prec z$

定理 5 の証明

「$x \prec y$ かつ $y \precsim z \implies x \precsim z$」は定理 1（推移律）より明らかである。

仮に，$x \approx z$ であるとすると，3 数 x，y，z は

$$x \prec y \quad \text{かつ} \quad y \precsim z \quad \text{かつ} \quad x \approx z$$

を満たす。しかし，定理 1（推移律）より

$$y \precsim z \text{ かつ } z \approx x \implies y \precsim z \text{ かつ } z \precsim x \implies y \precsim x$$

であるから，これは $x \prec y$ に矛盾する。したがって，$x \approx z$ ではない。

$x \precsim z$ かつ $x \not\approx z$ であるから，$x \prec z$ である。　（証明終）

定理 6 の証明

「$x \precsim y$ かつ $y \prec z \implies x \precsim z$」は定理 1（推移律）より明らかである。

仮に，$x \approx z$ であるとすると，3 数 x，y，z は

$$x \precsim y \quad \text{かつ} \quad y \prec z \quad \text{かつ} \quad x \approx z$$

を満たす。しかし，定理 1（推移律）より

$$z \approx x \text{ かつ } x \precsim y \implies z \precsim x \text{ かつ } x \precsim y \implies z \precsim y$$

であるから，これは $y \prec z$ に矛盾する。したがって，$x \approx z$ ではない。

$x \precsim z$ かつ $x \not\approx z$ であるから，$x \prec z$ である。（証明終）

定理 5, 定理 6 の系（推移律）

定理 5, 定理 6 の系（推移律）　3 数 x，y，z に対して，

- $x \prec y$ かつ $y \prec z \implies x \prec z$

定理 5, 定理 6 の系（推移律）の証明

定理 5 および定理 6 から明らか。（証明終）

§ 2.5　定理 2'

原著では，このあとの証明の中で，定理 2 が「定理 2 より $L_x \prec x$」という形で何度か使われるが，定理 2 は「$L_x \precsim x$」であって，「$L_x \prec x$」ではない。これは，原著の誤りと思われる。

しかし，このあとの証明は「$L_x \precsim x$」のままでは成立しないため，本稿では，次の定理 2′ を，ここで証明しておく[7]。

定理 2′

定理 2'　任意の数 $x := (L_x : R_x)$ に対して，

- $L_x \prec x$ かつ $x \prec R_x$

定理 2′ の前者（$L_x \prec x$）の証明

背理法で示す。

$\ell_x \nprec x$ を満たす数 $\ell_x \in L_x$ が存在すると仮定すると，定理 4a の対偶より $\ell_x \succsim x$，すなわち $x \precsim \ell_x$ である。

ここで，定義 2 より

$$L_x \not\succsim \ell_x \quad \text{かつ} \quad x \not\succsim R_{\ell_x}$$

であるが，$\ell_x \in L_x$ であるから前者は成り立たない。

よって，$\ell_x \nprec x$ を満たす数 $\ell_x \in L_x$ は存在しない。

したがって，$L_x \prec x$ である。

（証明終）

定理 2′ の後者（$x \prec R_x$）の証明

前者（$L_x \prec x$）と同様に示される。（証明割愛）

[7] なお，定理 2′ の証明には定理 4a の対偶を使うが，定理 4a の証明には定理 4 を，そして定理 4 の証明は定理 2 を使う。そのため，「定理 2（$L_x \precsim x$，$x \precsim R_x$）の代わりに定理 2′（$L_x \prec x$，$x \prec R_x$）を，定理 2 として採用する」ということはできなかった。

§2.6　定義 1'，定義 2'（定義 1，定義 2 の言い換え）

定理 4′（定理 4 の必要十分化）を利用して，定義 1 と定義 2 をそれぞれ次のように書き換えておく。

定義 1′，定義 2′

定義 1'（数の生成の定義）

$L_x \prec R_x$ を満たす 2 つの集合 L_x，R_x に対して

$$x := (\, L_x : R_x \,)$$

を超現実数と呼ぶ。（または単に数と呼ぶ。）

定義 2'（数の大小関係の定義）

2 数 $x := (\, L_x : R_x \,)$，$y := \left(L_y : R_y \right)$ に対して，$x \precsim y$ とは，

$$L_x \prec y \quad \text{かつ} \quad x \prec R_y$$

を満たすことである。

今後は定義 1，定義 2 の代わりに定義 1′，定義 2′ を用いることにする。

§ 2.7　数 $\widehat{-10}$，$\widehat{-0.1}$，$\widehat{0.1}$，$\widehat{10}$ の定義（数の生成の第 3 日目）

まず，既に生成されている 3 数 $\widehat{-1}$，$\widehat{0}$，$\widehat{1}$ を用いた集合 L_x，R_x によって，第 3 日目に新たに生成される数 $(L_x : R_x)$ を全て書き並べておく。（定義 1′ の $L_x \prec R_x$ を満たさなければならないことに注意。）

- $\widehat{1} \in L_x$ の場合，
「$\widehat{-1}$ が L_x に含まれるか否か」が 2 通り，「$\widehat{0}$ が L_x に含まれるか否か」が 2 通りで，計 4 個の数が生成される。新たに生成されるのは以下の 4 個である。

$$\left(\left\{\widehat{-1},\widehat{0},\widehat{1}\right\}:\emptyset\right),\quad \left(\left\{\widehat{-1},\widehat{1}\right\}:\emptyset\right),\quad \left(\left\{\widehat{0},\widehat{1}\right\}:\emptyset\right),\quad \left(\left\{\widehat{1}\right\}:\emptyset\right)$$

- $\widehat{-1} \in R_x$ の場合，
「$\widehat{0}$ が R_x に含まれるか否か」が 2 通り，「$\widehat{1}$ が R_x に含まれるか否か」が 2 通りで，計 4 個の数が生成される。新たに生成されるのは以下の 4 個である。

$$\left(\emptyset:\left\{\widehat{-1},\widehat{0},\widehat{1}\right\}\right),\quad \left(\emptyset:\left\{\widehat{-1},\widehat{0}\right\}\right),\quad \left(\emptyset:\left\{\widehat{-1},\widehat{1}\right\}\right),\quad \left(\emptyset:\left\{\widehat{-1}\right\}\right)$$

- それ以外の場合，
「$\widehat{-1}$ が L_x に含まれるか否か」が 2 通り，「$\widehat{1}$ が R_x に含まれるか否か」が 2 通り，「$\widehat{0}$ が L_x に含まれるか R_x に含まれるかどちらにも含まれないか」が 3 通りで，計 12 個の数が考えられる。ただし，それらのうちの $(\emptyset:\emptyset)$，$\left(\emptyset:\left\{\widehat{0}\right\}\right)$，$\left(\left\{\widehat{0}\right\}:\emptyset\right)$ の 3 個は既に第 2 日目までに生成されている $\widehat{0}$，$\widehat{-1}$，$\widehat{1}$ であるから，第 3 日目に新たに生成されるのは以下の 9 個である。

$$\left(\left\{\widehat{-1},\widehat{0}\right\}:\left\{\widehat{1}\right\}\right),\quad \left(\left\{\widehat{-1}\right\}:\left\{\widehat{0},\widehat{1}\right\}\right),\quad \left(\left\{\widehat{-1}\right\}:\left\{\widehat{1}\right\}\right),$$
$$\left(\left\{\widehat{-1},\widehat{0}\right\}:\emptyset\right),\quad \left(\left\{\widehat{-1}\right\}:\left\{\widehat{0}\right\}\right),\quad \left(\left\{\widehat{-1}\right\}:\emptyset\right),$$
$$\left(\left\{\widehat{0}\right\}:\left\{\widehat{1}\right\}\right),\quad \left(\emptyset:\left\{\widehat{0},\widehat{1}\right\}\right),\quad \left(\emptyset:\left\{\widehat{1}\right\}\right)$$

以上，計 17 個の数が新たに生成されたので，これらについて考察する。

数 $\widehat{-10}$，$\widehat{-0.1}$，$\widehat{0.1}$，$\widehat{10}$ の定義

- $\widehat{-10} := \left(\emptyset:\left\{\widehat{-1}\right\}\right)$
- $\widehat{-0.1} := \left(\left\{\widehat{-1}\right\}:\left\{\widehat{0}\right\}\right)$
- $\widehat{0.1} := \left(\left\{\widehat{0}\right\}:\left\{\widehat{1}\right\}\right)$
- $\widehat{10} := \left(\left\{\widehat{1}\right\}:\emptyset\right)$

$\boxed{\widehat{-10} \prec \widehat{-1}\ \text{であることの証明}}$[8]

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{-1}$，$y = \widehat{-10}$ とすると，$R_y = \left\{\widehat{-1}\right\}$ であるが，

$$\widehat{-1} \nprec \left\{\widehat{-1}\right\}$$

より，「$L_x \prec y$ かつ $x \prec R_y$」の後者を満たさない。

ゆえに，$\widehat{-1} \precsim \widehat{-10}$ ではない。すなわち $\widehat{-10} \not\succsim \widehat{-1}$ である。

したがって，定理 4a より $\widehat{-10} \prec \widehat{-1}$ である。（証明終）

$\boxed{\widehat{-1} \prec \widehat{-0.1} \prec \widehat{0},\ \widehat{0} \prec \widehat{0.1} \prec \widehat{1}\ \text{であることの証明}}$

定理 2′ によって明らか。（証明終）

$\boxed{\widehat{1} \prec \widehat{10}\ \text{であることの証明}}$[8]

定義 2 における 2 数 x，y を $x = \widehat{10}$，$y = \widehat{1}$ とすると，$L_x = \left\{\widehat{1}\right\}$ であるが，

$$\left\{\widehat{1}\right\} \nprec \widehat{1}$$

より，「$L_x \prec y$ かつ $x \prec R_y$」の前者を満たさない。

ゆえに，$\widehat{10} \precsim \widehat{1}$ ではない。すなわち $\widehat{1} \not\succsim \widehat{10}$ である。

したがって，定理 4a より $\widehat{1} \prec \widehat{10}$ である。（証明終）

これらの証明と「定理 5, 定理 6 の系（推移律）」によって，第 1 日目に生まれた数 $\widehat{0}$，第 2 日目に生まれた数 $\widehat{-1}$ と $\widehat{1}$，そして第 3 日目に生まれた数 17 個のうちの 4 個 $\widehat{-10}$，$\widehat{-0.1}$，$\widehat{0.1}$，$\widehat{10}$ について，次のような大小関係があることがわかった。

$$\widehat{-10} \prec \widehat{-1} \prec \widehat{-0.1} \prec \widehat{0} \prec \widehat{0.1} \prec \widehat{1} \prec \widehat{10}$$

実は，次に述べる定理 7 によって[9]，第 3 日目に生まれた残りの 13 個はすべて，これら 7 数のいずれかと等しくなることがわかる。

定理 7

定理 7　$x := (\,L_x : R_x\,)$ を数とする。数の集合 L，R が

$$L \prec x \prec R$$

を満たしているとき，$L_z = L_x \cup L$ を左集合，$R_z = R_x \cup R$ を右集合として生成される z，すなわち

$$z := (\,L_z : R_z\,) = (\,L_x \cup L : R_x \cup R\,)$$

は数であり，$x \approx z$ となる。

---

(8) 本稿の「$\widehat{-10} \prec \widehat{-1}$ であることの証明」と「$\widehat{1} \prec \widehat{10}$ であることの証明」は，原著とは異なる方法である。

(9) 正確には，「定理 7 から得られる定理 7a，7b によって」。

定理 7 の証明

z が数であることは定義 1′ より明らかであるから，$x \approx z$ のみ示す。

まず，$z \precsim x$ を示す。定理 2′ より $L_x \prec x$，また仮定より $L \prec x$ であるから

$$L_x \cup L \prec x$$

また，定理 2′ より $z \prec R_x \cup R$ であるから

$$z \prec R_x$$

したがって，定義 2 より $z \precsim x$ である。

次に，$x \precsim z$ を示す。定理 2′ より $L_x \cup L \prec z$ であるから

$$L_x \prec z$$

また，定理 2′ より $x \prec R_x$ ，また仮定より $x \prec R$ であるであるから

$$x \prec R_x \cup R$$

したがって，定義 2 より $x \precsim z$ である。

$x \succsim z$ かつ $x \precsim z$ であるから，前提 3′ より $x \approx z$ である。（証明終）

定理 7a

定理 7a　数 $z := (L_z : R_z)$ において，

- L_z に最大元 ℓ_z があるならば，$\{\ell_z\}$ を左集合，R_z を右集合として生成される $x := (\{\ell_z\} : R_z)$ は数であり，$x \approx z$ である。
- R_z に最小元 r_z があるならば，L_z を左集合，$\{r_z\}$ を右集合として生成される $x := (L_z : \{r_z\})$ は数であり，$x \approx z$ である。

定理 7a の前者の証明

z は数なので，定義 1′ より $L_z \prec R_z$ である。よって $\ell_z \prec R_z$ である。

したがって $\{\ell_z\} \prec R_z$ であるから，定義 1′ より，$x := (\{\ell_z\} : R_z)$ は数である。

ここで，$x := (\{\ell_z\} : R_z)$ に定理 2′ を適用すると

$$\{\ell_z\} \prec x \prec R_z$$

であり，また，ℓ_z の最大性より $L_z \precsim \ell_z$ であるから，定理 5 と定理 6（推移律）を適用すると

$$L_z \prec x \prec R_z$$

も言える。

さらに，$\{\ell_z\} \subset L_z$ であるから

$$z := (L_z : R_z) = (\{\ell_z\} \cup L_z : R_z \cup R_z)$$

となり，これらは定理 7 の条件（仮定）を満たしている。

したがって，$x \approx z$ である。（証明終）

定理 7a の後者の証明

前者と同様に示される。（証明割愛）

定理 7a′

定理 7a′　数 $z := (L_z : R_z)$ において，

- L_z に最大元 ℓ_z，R_z に最小元 r_z があるならば，$\{\ell_z\}$ を左集合，$\{r_z\}$ を右集合として生成される $x := (\{\ell_z\} : \{r_z\})$ は数であり，$x \approx z$ である。

定理 7a′ の証明

これは定理 7a の 2 つをまとめただけのものである。（証明終）

定理 7a の系

定理 7a の系

- 数 $z := (\emptyset : R_z)$ において，R_z に最小元 r_z があるならば，$\emptyset$ を左集合，$\{r_z\}$ を右集合として生成される $x := (\emptyset : \{r_z\})$ は数であり，$x \approx z$ である。
- 数 $z := (L_z : \emptyset)$ において，L_z に最大元 ℓ_z があるならば，$\{\ell_z\}$ を左集合，$\emptyset$ を右集合として生成される $x := (\{\ell_z\} : \emptyset)$ は数であり，$x \approx z$ である。

定理 7a の系の前者の証明

これは，定理 7a の前者の特別な場合（$L_z = \emptyset$ の場合）である。（証明終）

定理 7a の系の後者の証明

これは，定理 7a の後者の特別な場合（$R_z = \emptyset$ の場合）である。（証明終）

定理 7b

定理 7b　$L_c < \widehat{0} < R_c$ ならば，$c := (L_c : R_c)$ は数であり，$c \approx \widehat{0}$ である。

定理 7b の証明

c が数であることは，定義 1′ より明らかなので，$c \approx \widehat{0}$ のみ示す。

定理 7 において，$x = \widehat{0}$（すなわち $L_x = R_x = \emptyset$），$L = L_c$，$R = R_c$ とすると，$L < x < R$ である。よって，定理 7 の条件（仮定）を満たしているので，$z := (L_x \cup L : R_x \cup R)$ とおくと $z \approx x$ となる。

ここで，$(L_x \cup L : R_x \cup R) = (\emptyset \cup L_c : \emptyset \cup R_c) = (L_c : R_c)$ で，これは $z = c$ を意味するので，$z \approx x$ より $c \approx \widehat{0}$ である。（証明終）

定理 7b の系

定理 7b の系

- $\widehat{0} < R_a$ ならば，$a := (\emptyset : R_a)$ は数であり，$a \approx \widehat{0}$ である。
- $L_b < \widehat{0}$ ならば，$b := (L_b : \emptyset)$ は数であり，$b \approx \widehat{0}$ である。

定理 7b の系の証明

前者は，定理 7b の $L_c = \emptyset$ の場合である。また，後者は，定理 7b の $R_c = \emptyset$ の場合である。（証明終）

補足　定理 7b の系は，補題 2 の特別な場合である。

定理 7a′，定理 7a の系，定理 7b，定理 7b の系を用いれば，第 3 日目に生まれた数 17 個のうちの残りの 13 個は，既に定義した 7 個の数字と，それぞれ次のように等しいことがわかる。

- $\left(\left\{\widehat{-1},\widehat{0},\widehat{1}\right\} : \emptyset\right) \approx \left(\left\{\widehat{-1},\widehat{1}\right\} : \emptyset\right) \approx \left(\left\{\widehat{0},\widehat{1}\right\} : \emptyset\right) \approx \widehat{10}$　（∵ 定理 7a の系）
- $\left(\emptyset : \left\{\widehat{-1},\widehat{0},\widehat{1}\right\}\right) \approx \left(\emptyset : \left\{\widehat{-1},\widehat{0}\right\}\right) \approx \left(\emptyset : \left\{\widehat{-1},\widehat{1}\right\}\right) \approx \widehat{-10}$　（∵ 定理 7a の系）
- $\left(\left\{\widehat{-1},\widehat{0}\right\} : \left\{\widehat{1}\right\}\right) \approx \widehat{0.1}$　（∵ 定理 7a′）
- $\left(\left\{\widehat{-1}\right\} : \left\{\widehat{0},\widehat{1}\right\}\right) \approx \widehat{-0.1}$　（∵ 定理 7a′）
- $\left(\left\{\widehat{-1}\right\} : \left\{\widehat{1}\right\}\right) \approx \widehat{0}$　（∵ 定理 7b）
- $\left(\left\{\widehat{-1},\widehat{0}\right\} : \emptyset\right) \approx \widehat{1}$　（∵ 定理 7a の系）
- $\left(\left\{\widehat{-1}\right\} : \emptyset\right) \approx \widehat{0}$　（∵ 定理 7b の系）
- $\left(\emptyset : \left\{\widehat{0},\widehat{1}\right\}\right) \approx \widehat{-1}$　（∵ 定理 7a の系）
- $\left(\emptyset : \left\{\widehat{1}\right\}\right) \approx \widehat{0}$　（∵ 定理 7b の系）

§ 2.8　数の生成の第 $(n+1)$ 日目

この節にて，§ 2.7（数の生成の第 3 日目）までに考えたことを一般化する。

以下，$n \in \mathbb{N}$ とする。また，もっとも早く生成された数のことを「最年長」，あとから生成された数を「若い」と呼ぶことにする。

補題 3

補題 3　第 n 日目までに m 個の数が生成されたとし，それらを小さい方から順に並べて

$$x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \cdots \prec x_m$$

とする。このとき，

(1) $i \leqq j$（$i = 2, 3, \cdots, m-1$，$j = 2, 3, \cdots, m-1$）のとき，

$$a := \left(\{ x_{i-1} \} : \left\{ x_{j+1} \right\} \right)$$

は，「x_i，$\cdots$，x_j のうちの最年長の数」と等しい。

(2) $j = 1, 2, \cdots, m-1$ のとき，

$$a := \left(\emptyset : \left\{ x_{j+1} \right\} \right)$$

は，「x_1，$\cdots$，x_j のうちの最年長の数」と等しい。

(3) $i = 2, 3, \cdots, m$ のとき，

$$a := (\{ x_{i-1} \} : \emptyset)$$

は，「x_i，$\cdots$，x_m のうちの最年長の数」と等しい。

補題 3 の (1) の証明

「x_i，$\cdots$，x_j のうちの最年長の数」を x_k とすると，数の並べ方から

$$x_{i-1} \prec x_i \precsim x_k \precsim x_j \prec x_{j+1}$$

であるから，定理 5 と定理 6（推移律）より

$$x_{i-1} \prec x_k \prec x_{j+1}$$

したがって，定理 7 における x，L，R を $x = x_k$，$L = \{ x_{i-1} \}$，$R = \left\{ x_{j+1} \right\}$ とすると，条件 $L \prec x \prec R$ を満たしている。よって

$$z := \left(\{ x_{i-1} \} \cup L_{x_k} : \left\{ x_{j+1} \right\} \cup R_{x_k} \right)$$

は数であり，$x_k \approx z$ である。

また，定理 2′ より $L_{x_k} \prec x_k \prec R_{x_k}$ なので，

$$L_{x_k} \subset \{x_1, \cdots, x_{k-1}\}, \quad R_{x_k} \subset \{x_{k+1}, \cdots, x_m\}$$

である。ただし，L_{x_k} の要素と R_{x_k} の要素はすべて x_k より年長である必要があるが，x_i，$\cdots$，x_j の x_k 以外の元はすべて x_k より若い[(10)] ので，これらは L_{x_k} や R_{x_k} には含まれない。よって，

$$L_{x_k} \subset \{x_1, \cdots, x_{i-1}\}, \quad R_{x_k} \subset \left\{x_{j+1}, \cdots, x_m\right\}$$

であり，すなわち $L_{x_k} \precsim x_{i-1}$，$x_{j+1} \precsim R_{x_k}$ である[(11)] 。したがって，定理 7a′ より

$$\left(\{x_{i-1}\} \cup L_{x_k} : \left\{x_{j+1}\right\} \cup R_{x_k}\right) = \left(\{x_{i-1}\} : \left\{x_{j+1}\right\}\right)$$

となり，これは $z = a$ であることを意味する。

したがって，$x_k \approx a$ である。すなわち，a は「x_i，$\cdots$，x_j のうちの最年長の数」と等しい。

（証明終）

補題 3 の (2) の証明

「x_1，$\cdots$，x_j のうちの最年長の数」を x_k とすると，数の並べ方から

$$x_1 \precsim x_k \precsim x_j \prec x_{j+1}$$

であるから，定理 5 と定理 6（推移律）より

$$x_k \prec x_{j+1}$$

したがって，，定理 7 における x，L，R を $x = x_k$，$L = \emptyset$，$R = \left\{x_{j+1}\right\}$ とすると，条件 $L \prec x \prec R$ を満たしている[(12)] 。よって

$$z := \left(\emptyset \cup L_{x_k} : \left\{x_{j+1}\right\} \cup R_{x_k}\right)$$

は数であり，$x_k \approx z$ である。

また，定理 2′ より $L_{x_k} \prec x_k \prec R_{x_k}$ なので，

$$L_{x_k} \subset \{x_1, \cdots, x_{k-1}\}, \quad R_{x_k} \subset \{x_{k+1}, \cdots, x_m\}$$

である。ただし，L_{x_k} の要素と R_{x_k} の要素はすべて x_k より年長である必要があるが，x_1，$\cdots$，x_j の x_k 以外の元はすべて x_k より若い[(10)]ので，これらは L_{x_k} や R_{x_k} には含まれない。よって，

$$L_{x_k} \subset \emptyset, \quad R_{x_k} \subset \left\{x_{j+1}, \cdots, x_m\right\}$$

(10) x_k が最年長であるため。
(11) 仮に L_{x_k} や R_{x_k} が空集合だったとしても，空集合原理によりこれらは成り立つ。
(12) $L \prec x$ は空集合原理より。

であり，すなわち $L_{x_k}=\emptyset$，$x_{j+1}\precsim R_{x_k}$ である[13] 。したがって，定理 7a より

$$\left(\emptyset\cup L_{x_k}:\left\{x_{j+1}\right\}\cup R_{x_k}\right)=\left(\emptyset:\left\{x_{j+1}\right\}\right)$$

となり，これは $z=a$ であることを意味する。

したがって，$x_k\approx a$ である。すなわち，a は「x_1，$\cdots$，x_j のうちの最年長の数」と等しい。

（証明終）

補題 3 の (3) の証明

補題 3 の (2) と同様に示される。（証明割愛）

補題 3 の (1)〜(3) であげた数は，すべて「（ある集合の元のうち）最年長の数と等しい」とわかったので，つまり，第 n 日目までに既に生成されている。この事実と定理 7a′ より，第 $(n+1)$ 日目に新しい数を生成する可能性があるのは，

$$(\emptyset,\{x_1\}),(\{x_1\},\{x_2\}),\cdots,(\{x_{m-1}\},\{x_m\}),(\{x_m\},\emptyset)$$

の $(m+1)$ 個，及びこれら $(m+1)$ 個のいずれかと等しい数のみである。

そして，これら $(m+1)$ 個は，確かに第 $(n+1)$ 日目に新しい数を生成する。それを次に示す。

第 $(n+1)$ 日目までに生成される数

第 n 日目までに m 個の数が生成されたとし，それらを小さい方から順に並べて

$$x_1\prec x_2\prec x_3\prec\cdots\prec x_m$$

とする。

(1) 第 $(n+1)$ 日目には，

$$(\emptyset,\{x_1\}),(\{x_1\},\{x_2\}),\cdots,(\{x_{m-1}\},\{x_m\}),(\{x_m\},\emptyset)$$

の $(m+1)$ 個の数が，新たに生成される。
また，この $(m+1)$ 個の数を左から順に y_0，y_1，$\cdots$，y_{m-1}，y_m とするとき，これらと，第 n 日目までに生成された m 個の数 x_1，x_1，$\cdots$，x_m を合わせた計 $(2m+1)$ 個の数の大小関係は，

$$y_0\prec x_1\prec y_1\prec x_2\prec\cdots\prec x_{m-1}\prec y_{m-1}\prec x_m\prec y_m$$

となる。

(2) 第 n 日目までに生成される数の個数は，計 (2^n-1) 個である。

---

[13] 仮に R_{x_k} が空集合だったとしても，空集合原理より $x_{j+1}\precsim R_{x_k}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{(1) の証明}}$

- まず，y_1，y_2，$\cdots$，y_{m-1} の $(m-1)$ 個が第 $(n+1)$ 日目に新しく生成される数であることを示す。
  $i = 1, 2, \cdots, m-1$ のとき，$y_i = (\{x_i\} : \{x_{i+1}\})$ であるから，定理 2′ より $x_i \prec y_i \prec x_{i+1}$ を満たす。
  ここで，x_i と x_{i+1} の間には第 n 日目までに生成された数は存在しない。
  したがって，y_i は第 $(n+1)$ 日目に新しく生成される数である。
- 次に，$y_0 := (\emptyset : \{x_1\})$ が第 $(n+1)$ 日目に新しく生成される数であることを示す。
  そのために，$y_0 \prec x_1$ を示す(14)。
  定義 2 における 2 数 x，y を $x = x_1$，$y = y_0$ とすると，$R_y = \{x_1\}$ であるが，

$$x_1 \not\prec \{x_1\}$$

  より，「$L_x \prec y$ かつ $x \prec R_y$」の後者を満たさない。
  ゆえに，$x_1 \precsim y_0$ ではない。すなわち $y_0 \not\succsim x_1$ である。
  したがって，定理 4a より $y_0 \prec x_1$ である。
  ここで，第 n 日目までに生成された数の中には，x_1 より小さい数は存在しない。
  したがって，y_0 は第 $(n+1)$ 日目に新しく生成される数である。
- 最後に，$y_m := (\{x_m\} : \emptyset)$ が第 $(n+1)$ 日目に新しく生成される数であることを示す。
  そのために，$x_m \prec y_m$ を示す(15)。
  定義 2 における 2 数 x，y を $x = y_m$，$y = x_m$ とすると，$L_x = \{x_m\}$ であるが，

$$\{x_m\} \not\prec x_m$$

  より，「$L_x \prec y$ かつ $x \prec R_y$」の前者を満たさない。
  ゆえに，$y_m \precsim x_m$ ではない。すなわち $x_m \not\succsim y_m$ である。
  したがって，定理 4a より $x_m \prec y_m$ である。
  ここで，第 n 日目までに生成された数の中には，x_m より大きい数は存在しない。
  したがって，y_m は第 $(n+1)$ 日目に新しく生成される数である。

以上より，第 $(n+1)$ 日目には，

$$y_0 \prec x_1 \prec y_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{m-1} \prec y_{m-1} \prec x_m \prec y_m$$

を満たす $(m+1)$ 個の数 y_0，y_1，$\cdots$，y_{m-1}，y_m が新しく生成される。（証明終）

---

(14) この証明は，本稿 § 2.7 の「$\widehat{-10} \prec \widehat{-1}$ であることの証明」と同様である。

(15) この証明は，本稿 § 2.7 の「$\widehat{1} \prec \widehat{10}$ であることの証明」と同様である。

(2) の証明

第 n 日目までに生成される数の個数を a_n 個とすると，補題 3 と (1) より，数列 $\{a_n\}$ は漸化式

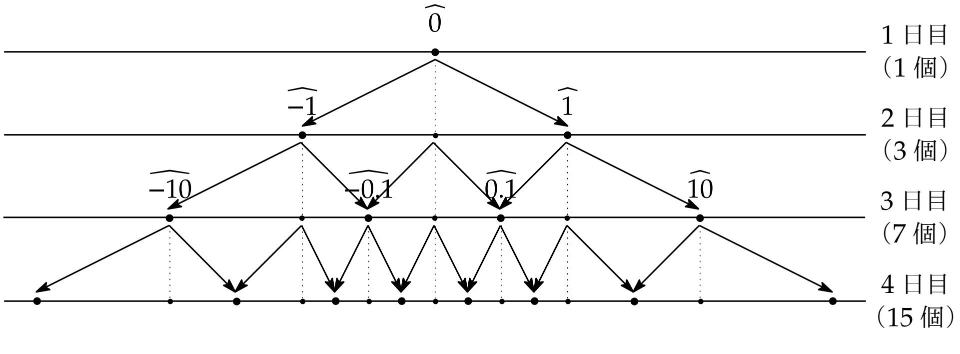
$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす。この漸化式より，一般項 $a_n = 2^n - 1$ が求まる。（証明終）

最後に，数が生成されていく過程と，数の大小関係を，第 4 日目まで図示する。

- 新しく生成される数を，既に生成されている数よりも大きめの点で表している。
- 右上から左下に向かう矢印は，左下の数を生成する右集合に右上の数を使うことを表し，左上から右下に向かう矢印は，右下の数を生成する左集合に左上の数を使うことを表している。
- 上の段にある数は，下の段にある数よりも年長であり，下の段にある数は，上の段にある数よりも若い。
- 右にある数は，左にある数よりも大きく，左にある数は，右にある数よりも小さい。

なお，数の値は 2 進法の表記である。



第 3 日目までに生成された数の集合から生成される数の具体例

例 1　数 $\left(\emptyset : \left\{\widehat{-0.1}, \widehat{1}, \widehat{10}\right\}\right)$ は，右集合の最小元 $\widehat{-0.1}$ より小さい数の中で最年長である $\widehat{-1}$ に等しい。

例 2　数 $\left(\left\{\widehat{-0.1}\right\} : \left\{\widehat{1}, \widehat{10}\right\}\right)$ は，左集合の最大元 $\widehat{-0.1}$ と 右集合の最小元 $\widehat{1}$ の間にある数の中で最年長である $\widehat{0}$ に等しい。

例 3　数 $\left(\left\{\widehat{-0.1}, \widehat{1}\right\} : \left\{\widehat{10}\right\}\right)$ は，左集合の最大元 $\widehat{1}$ と 右集合の最小元 $\widehat{10}$ の間の数として，新しく生成される。（ちなみに，これは $\widehat{1}$ と $\widehat{10}$ の間の最年長の数となる。）

例 4　数 $\left(\left\{\widehat{-0.1}, \widehat{1}, \widehat{10}\right\} : \emptyset\right)$ は，左集合の最大元 $\widehat{10}$ より大きい数として，新しく生成される。（ちなみに，これは $\widehat{10}$ より大きい最年長の数となる。）

あとがき

一つ一つの定理に証明を付けていく作業は，とてつもなく難航した。

原著で「この場合にもさっきと同じことが言えて……」と書かれているものに証明を付けようとしても，同じ理屈では証明できないことが少なからずあった[16]。原著には定理 2 に関する誤りもあり，定理 2′ を作ることで事なきを得たものの，その考えに至るまでには試行錯誤を要した。

私がもっとも難儀したのは，§2.8（数の生成の第 $(n+1)$ 日目）である。3 日目までの数の生成で，法則は把握できたものの，いざ証明を書こうとすると，すぐに循環論法[17] に陥ってしまった。これは，法則が把握できてしまったことによる弊害であるが，悪戦苦闘の末，なんとか論理的にすべてを証明することができた。

いくつかの前提と「定義 1」と「定義 2」だけからスタートして，これだけのことが言えてしまうのだから，コンウェイの考えた「超現実数」の定義はすごいと，改めて思う。

＊　＊　＊

さて，本稿で記したことは，「超現実数の生成」と「超現実数の大小関係」のみであるが，これだけでは「数」とは言い難い。ただ大小関係が成り立てばよいだけであれば，$(\emptyset : \emptyset)$ が $\widehat{0}$ である必要はないし，$\left(\left\{\widehat{0}\right\} : \emptyset\right)$ が $\widehat{1}$ である必要もない。本稿で生成した数の体系に，和や積などの『演算』を定義してこそ，超現実数は初めて『数』たりうる。

また，本稿では，超現実数を生成する左集合・右集合はすべて有限集合であり，この作業をどこまで続けても，第 $(n+1)$ 日目までには「整数」と「2 進法表記で有限小数となる有理数」しか出てこない。つまり，これだけでは，作られる超現実数の集合は有理数の集合の部分集合でしかない。左集合・右集合に無限集合を含む場合を考えてこそ，超現実数は初めて『超現実数（＝実数を超えた数)』たりうる。

今後も原著をさらに読み進め，また改めて本稿の続きを記したい。

参考文献

[1] 『至福の超現実数 — 純粋数学に魅せられた男と女の物語』
（Donald E. Knuth 著，松浦俊輔訳，柏書房，2004 年 11 月)

---

(16) 本稿では，完全に同じ理屈が成り立つものに限って，「同様に示される」として証明を割愛した。

(17) 定理 A を証明するには定理 B が必要で，定理 B を証明するには証明 C が必要で，しかし定理 C を証明するには定理 A が必要，という堂々巡り。