「メネラウスの定理」と「チェバの定理」について

参拾萬数学工房

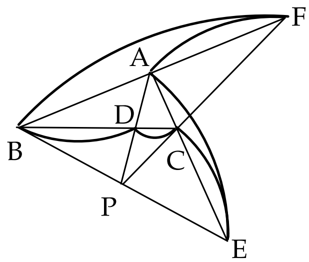
（http://www.geocities.jp/osaqmath/）

はじめに

「メネラウスの定理」と「チェバの定理」は，どちらもよく知られた定理として多くの問題集で取り扱っている。しかし，そのほとんどが，これらの定理を表面的にしか扱っていない。というよりもむしろ，「問題集の編纂者自身がこれらに習熟していないのではないか」と勘ぐりたくなってしまうものも少なからず存在する。各問題集におけるこれらの定理の取り扱い方を見れば見るほど，この両定理はよく知られた定理のようでいて，実はその深いところはほとんど知られていないのだと思えてならない。

例えば，右の図で

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$



が成り立つのだが，**少なくとも私は今までに，このケースの「チェバの定理」を紹介している本を見たことがない**。(「チェバの定理」については，詳しくは§ 3.1 を参照のこと)

しばしば，「メネラウスの定理」より先に「チェバの定理」を扱っている問題集を見かける。邪推になるが，これは，その問題集の編纂者が「メネラウスの定理よりチェバの定理の方がわかりやすい」と思っていることに起因するのだと考えられる。しかしそれはとんでもない誤解で，**「チェバの定理」を使う問題はすべて「メネラウスの定理」だけで解ける**のだから，間違いなく「メネラウスの定理」の方が「チェバの定理」よりも基本的である（これについては，詳しくは§ 3.4 を参照のこと)。また，歴史的にも，「メネラウスの定理」の発見は紀元 1 世紀，「チェバの定理」の発見は 17 世紀と，約 1600 年もの開きがあるのだから，「メネラウスの定理」を先に扱う方が理に適っていると言える。

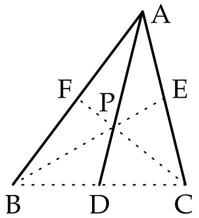
また，注意深く見比べないと気付きにくいが，**問題集によって「チェバの定理の逆」の取り扱い方が大きく異なっている**。「チェバの定理の逆」はなかなか一筋縄にはいかないのでどのスタイルを採用するかは問題集の編纂者次第なのだが，残念なことに，次のような**正しくない**「チェバの定理の逆」が載っている本も少なからず存在し，混乱に拍車をかける事態となっている。

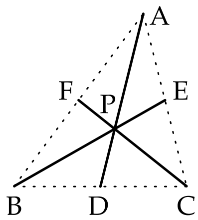
正しくない「チェバの定理の逆」

3 点 D，E，F をそれぞれ $\triangle$ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。それらのうちの 奇数個が内分点，偶数個が外分点 で，かつ，等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つならば，3 直線 AD，BE，CF は共点である。（**→これは誤り**）

本校で使用している教材「体系数学 II 幾何編」（数研出版）に載っている「チェバの定理の逆」も，これと同じように誤っている。（これと同じ誤りは他にもいくつもの問題集に散見されるが，ひどいものになると，下線部 が抜けているものまである。）

誤っているものは論外としても，どの形の「チェバの定理の逆」を採用するかによって，証明中での使い方（証明の書き方）も大きく変わってくるので，取り扱いには慎重を期す必要がある。（「チェバの定理の逆」については，詳しくは § 4.3 を参照のこと）





ところで，例えば右の図で

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} + \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}, \qquad \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EB}} + \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FC}}$$

などが成り立つことは，まったく知られていないようである。これは「メネラウスの定理」からすぐに導かれる帰結なのだが，「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を有用な定理として教えるなら，同程度に有用なこの定理も知っているべきと思われる。（この定理については，詳しくは § 5. を参照のこと）

我々教員は，授業で教えることがらについては，教える以上の知識を持っていなければならない。本稿は，この 2 つの定理について，授業担当者が知っているべきと思われる内容をまとめたものである。ここに記した内容すべてを生徒たちに教えるべきだとも思わないが，必要に応じて生徒に紹介し，応用力の幅を広げていきたい。

なお，本稿はあくまで「中高生向けの授業」を主眼においているため，すべてをユークリッド平面上で扱っていることを前提としている。

本稿の構成

§ 1.　共線・共点

次の用語は特に § 4. で使うのだが，それ以外の節でも必要に応じて用いるために最初に取り上げておく。中高生向けの問題集でこれらの用語を扱っているものは皆無だが，少なくとも教師は知っておいた方がよい。

- 3 点が同一直線上にあることを，「**3 点は 共線 な位置にある**」，または単に「**3 点は 共線 である**」という。（この 3 点のことを **共線点** ということもある。）
- 3 直線が 1 点で交わることを，「**3 直線は 共点 な位置にある**」，または単に「**3 直線は 共点 である**」という。（この 3 直線のことを **共点線** ということもある。）

3 点が共線でないときは，「3 点は一般の位置にある」という。同様に，3 直線が共点でないときは，「3 直線は一般の位置にある」という。

「共線」，「共点」はいずれも **位置関係** を表す用語である。くれぐれも，次のような **誤用** をしないように注意されたい。

誤用例①　「3 点 A，B，C の共線を ℓ とする」 → **この表現は誤り**

誤用例②　「3 直線 ℓ，m，n の共点を P とする」 → **この表現は誤り**

§ 2.　メネラウスの定理

メネラウス（Menelaus，1 世紀頃，アレクサンドリア）は「球面幾何学」の生みの親とされている。彼は「球面学（Sphaerica）」という著作の中に，今日「メネラウスの定理」と呼ばれている定理を記している。

現在，メネラウスの名は「メネラウスの定理の発見者」としてしかほとんど知られていないようだが，後世に与えた影響を考えれば，「ユークリッド幾何が絶対視されていた時代に，その呪縛にとらわれず球面幾何を研究した数学者」として，もっと評価されてよいと思う。

§ 2.1　「メネラウスの定理」とその証明

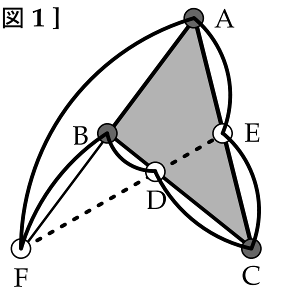
メネラウスの定理

直線 ℓ は，$\triangle$ABC の 3 頂点 A，B，C のいずれをも通らないものとする〔注 1〕。また，直線 ℓ が 3 直線 BC，CA，AB のいずれとも交わるとき〔注 2〕，その交点をそれぞれ D，E，F とする。このとき，等式

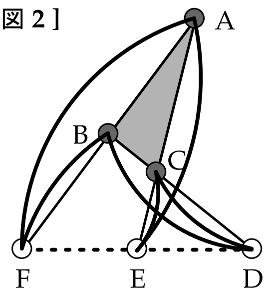
$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\times\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

が成り立つ〔注 3〕。

[図 1]



[図 2]



（以下，本稿では，上記の $\triangle$ABC を「**メネラウス三角形**」と呼び，図中ではその内部を塗りつぶし，その各頂点を●印で表す。また，直線 ℓ を「**メネラウス線**」と呼び，図中では太い点線で表す。そして，メネラウス三角形の辺（およびその延長）とメネラウス線との交点（すなわち 3 点 D，E，F）を「**メネラウス点**」と呼び，図中ではこれらの点を○印で表す。）

〔注 1〕　**直線 ℓ が 3 頂点 A，B，C のいずれかを通ってしまうと，3 点 D，E，F のうちの 2 つがその点と一致し，等式の分母に 0 が出てきてしまうので，この条件によってそれを除外する必要がある。**

〔注 2〕　**直線 ℓ が 3 直線 BC，CA，AB のいずれかと平行な場合，3 点 D，E，F のいずれかが存在しないので，この条件によってそれを除外する必要がある。**

〔注 3〕　**ここでは「始めに直線 ℓ ありき」というスタイルで「メネラウスの定理」を記述したが，その場合は〔注 1〕,〔注 2〕のような場合を除外する必要があり，鬱陶しい。後ほど，この定理を「始めに 3 点 D，E，F ありき」という表現に書き換えることにする。(→ § 4.)**

「メネラウス三角形」と「メネラウス線」と「メネラウス点」の位置関係は，**[図 1]** と **[図 2]** の 2 種類のパターンがある（ただし，いずれの図も，各点のアルファベットの与え方は一例に過ぎない)。具体的には，メネラウス直線が △ABC の内部を通るときは，**[図 1]** のように，3 点 D，E，F のうちの 2 つが辺の内分点で，残りの 1 つが辺の外分点となる。また，メネラウス直線が △ABC の内部を通らないときは，**[図 2]** のように，3 点 D，E，F がずべて辺の外分点となる。

後述する 基本例題 A–4. のように，「 **[図 1]** の場合だけでは解けない問題」も存在するので，**[図 1] の場合にしか触れないような教え方はくれぐれも避けたい**。

これらの図を黒板で板書する際には，$\boxed{\text{3 色（例えば黄色と青色と赤色）のチョーク}}$ を使い，「メネラウス三角形（△ABC)」を構成する 3 直線 AB，BC，CA とその各頂点 A，B，C（●）を $\boxed{\textbf{黄色}}$ で,「メネラウス点（○)」と「メネラウス線」を $\boxed{\textbf{青色}}$ で，そして「点の辿り方」を $\boxed{\textbf{赤色}}$ で，などと色を使い分けるとよい（その単元の学習中は，常に同じ色使いで統一すること)。さらに，板書した等式 $\left(\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1\right)$ 内のアルファベットも，A と B と C を $\boxed{\textbf{黄色}}$ で，そして D と E と F を $\boxed{\textbf{青色}}$ で書くことにより,「点の辿り方」が理解しやすくなる。

さて，証明だが，ここでは平行線を補助線として使う方法を 3 つ紹介する。（**「体系数学 II 幾何編」には〔証明 1〕の方法が載っている**。）いずれの証明も **[図 1]**，**[図 2]** の場合に依らないが，下では **[図 1]** の場合の図だけ与えておく。(生徒には **[図 2]** の場合の証明も考えさせたい。)

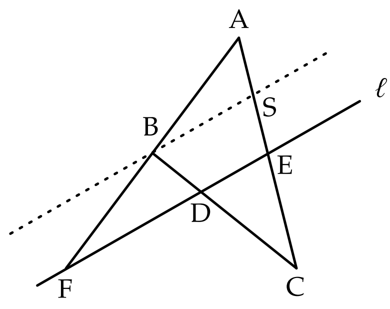
蛇足だが，私は個人的には〔証明 2〕が最もエレガントだと思う。

〔メネラウスの定理の証明 1〕

B を通り ℓ に平行な直線を引き，これと直線 CA との交点を S とすれば,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ES}} \times \frac{\mathrm{SE}}{\mathrm{EC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

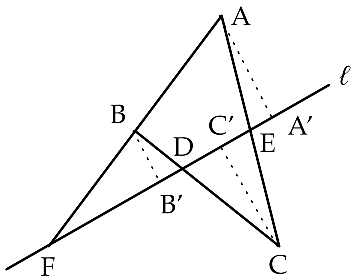
となる。　**〔証明終〕**



〔証明 1〕の補助線は，「点 B を通り ℓ に平行な直線」の代わりに「点 A を通り ℓ に平行な直線」や「点 C を通り ℓ に平行な直線」を引いても同様の証明が可能である（違う補助線を引く方法の証明を生徒に考えさせてもよいだろう）。

「メネラウスの定理」を扱っていない問題集では，この〔証明 1〕の補助線を引いて解く解法を紹介していることも多い。(→#10 ページの 問題 1. の解説を参照のこと）

〔メネラウスの定理の証明 2〕



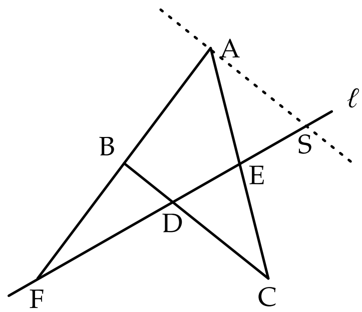
直線 ℓ 上に 3 点 A′，B′，C′ を，AA′ // BB′ // CC′ となるようにとる。このとき，$\triangle$AA′F ∽ $\triangle$BB′F，$\triangle$BB′D ∽ $\triangle$CC′D，$\triangle$CC′E ∽ $\triangle$AA′E より

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}} \times \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{CC'}} \times \frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{AA'}} = 1$$

となる。 **〔証明終〕**

次の〔証明 3〕は，〔証明 2〕の B′ と C′ が D に重なった場合に過ぎない。

〔メネラウスの定理の証明 3〕



A を通り BC に平行な直線を引き，これと ℓ との交点を S とする。このとき，$\triangle$ASF ∽ $\triangle$BDF と $\triangle$CDE ∽ $\triangle$ASE より

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{BD}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} \times \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AS}} = 1$$

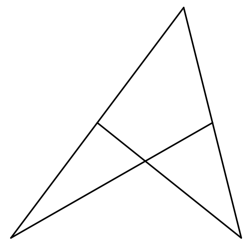
となる。 **〔証明終〕**

〔証明 3〕の補助線は，「点 A を通り BC に平行な直線」の代わりに「点 B を通り CA に平行な直線」や「点 C を通り AB に平行な直線」を引いても同様の証明が可能である（違う補助線を引く方法の証明を生徒に考えさせてもよいだろう）。

なお，他にも有名な証明として「面積を利用する方法」があるが，ここでは割愛する。

§ 2.2　「メネラウスの定理」を使う基本例題

【メネラウスの図形】

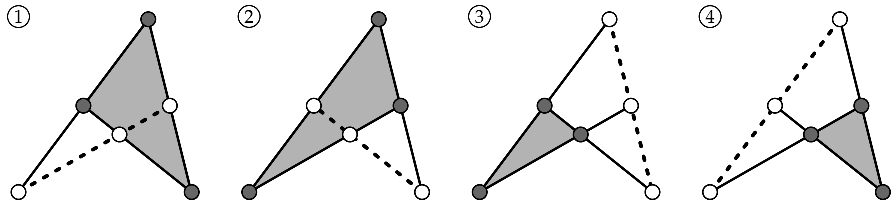


#4 ページの **[図 1]**，**[図 2]** は，向きを変えればいずれも右の図と同じ型をしている。以下，**本稿では**，この図を「**メネラウスの図形**」と呼ぶことにしよう。

「**メネラウスの図形**」は 4 本の直線で構成され，すべての直線上には，交点が 3 つずつある。

4 本の直線から 3 本を選ぶ方法は ${}_4C_3$ 通り，すなわち 4 通りある。それをすべて図示すると次の図のようになり，いずれも「**メネラウス三角形**」をなすことがわかる。

「メネラウスの図形」内の 3 直線の選び方（全 4 通り）



これらの「メネラウス三角形」に注目することによって，「**メネラウスの図形**」の図の 2 直線について「線分比」が与えられたとき，残りの 2 直線についての「線分比」はいずれも「メネラウスの定理」を 1 回適用するだけで求められる。その方法は簡単で，**「線分比がわかっている 2 直線」と「線分比を求めたい 1 直線」で作られる三角形を「メネラウス三角形」とみなせばよい**。

「**メネラウスの図形**」の問題は，「線分比を与えられる 2 直線の位置関係」によって 4 種類に分類することができるので，それらの具体例を以下に 1 題ずつ挙げ，かつ解法を紹介していくことにしよう（基本例題 A–1.〜基本例題 A–4.）。

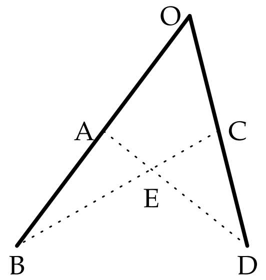
もちろん，以下の例題を生徒に出題するときには，問題文中の「$x_1 : x_2$」，「$y_1 : y_2$」の部分は具体的な比を設定すべきであるが，**問題によっては，問題作成時に比の設定を誤ると図が異なってしまう場合がある**ので注意しなければならない（具体的には，基本例題 A–1. と基本例題 A–2. は比を適当に与えても構わないが，基本例題 A–3. と基本例題 A–4. はそうはいかない）。

基本例題 A–1.

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，OC : CD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) AE : ED を求めよ。

(2) BE : EC を求めよ。

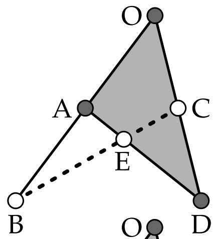


（解法）

(1)　右の図の「メネラウス三角形」に注目すれば，

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BA}} \times \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}} \times \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CO}} = \frac{x_1 + x_2}{x_2} \times \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}} \times \frac{y_2}{y_1} = 1 \quad \text{より}$$

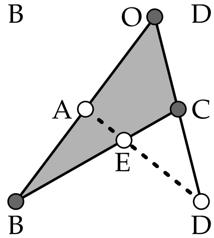
$$\mathrm{AE} : \mathrm{ED} = x_2 y_1 : (x_1 + x_2) y_2.$$



(2)　右の図の「メネラウス三角形」に注目すれば，

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}} \times \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} \times \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DO}} = \frac{x_1}{x_2} \times \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} \times \frac{y_2}{y_1 + y_2} = 1 \quad \text{より}$$

$$\mathrm{BE} : \mathrm{EC} = x_2(y_1 + y_2) : x_1 y_2.$$



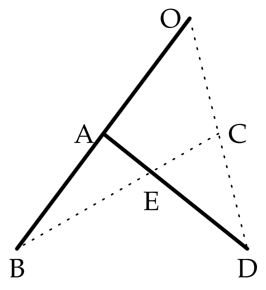
※　以下の例題では，解法は「メネラウス三角形」の図示にとどめることにする。

基本例題 A–2.

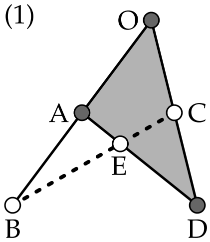
右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，AE : ED = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OC : CD を求めよ。

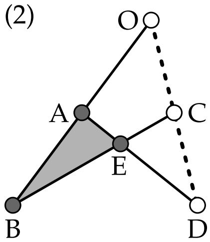
(2) BE : EC を求めよ。



（解法）　(1)



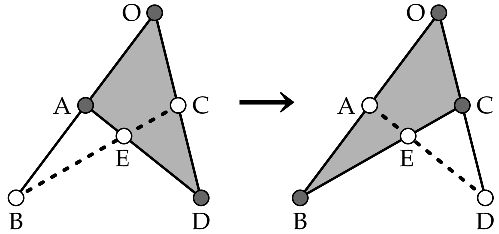
(2)



（注）　この問題の **(2)** の比 BE : EC の求め方を，次のように，あたかも「**(1)** の比 OC : CD を先に求めておく必要がある」かのように解説している問題集もある。これは，その解説の作成者が **[図 2]** の場合の「メネラウスの定理」を使いこなせないから起こるのであろう。

（問題集の解説によくある (2) の解法）

まず下図左のように，△OAD を「メネラウス三角形」と見立てて OC : CD を求めてから，その次に，下図右のように，△OBC を「メネラウス三角形」と見立てて BE : EC を求める。



もちろん，この解き方だって間違いではない。しかし，本問のように OC : CD も求める必要がある場合にはこれでも差し支えないが，OC : CD を求める必要がない場合には，この解法では「遠回り」である。

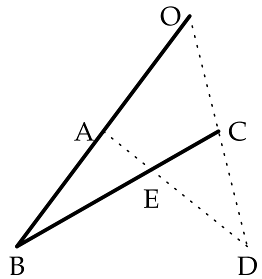
また，この問題は **[図 1]** の場合を **2** 回適用して解くことが可能だが，既に述べた通り，「 **[図 1]** の場合だけでは解けない問題」も存在する。（→ 基本例題 **A–4.**）

基本例題 A–3.

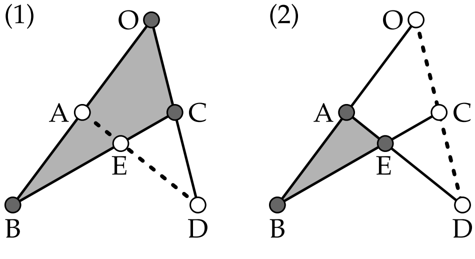
右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，BE : EC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OC : CD を求めよ。

(2) AE : ED を求めよ。



（解法）　(1)　(2)



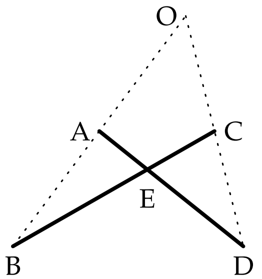
（注）　この問題の **(2)** に関しても，基本例題 **A–2.** と同様に，あたかも「**(1)** の OC : CD を先に求めておく必要がある」かのように解説している問題集もある。

基本例題 A–4.

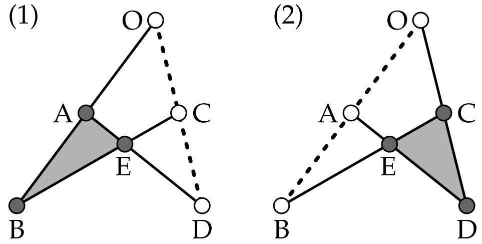
右図で，AE : ED = $x_1 : x_2$，BE : EC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OA : AB を求めよ。

(2) OC : CD を求めよ。



（解法）



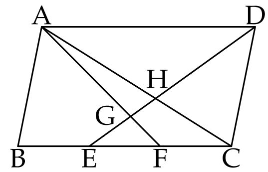
（注）　**この問題が，繰り返し指摘してきた「[図 1] の場合だけでは解けない問題」である。**

§ 2.3 「基本例題 A」の応用例

問題 1.

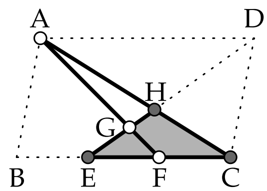
右の図のような平行四辺形 ABCD において，BE = EF = FC であるとき，EG : GH を求めなさい。

（体系数学 II 幾何編 P31–練習 3 の改題）



この問題では, 恐らく多くの人が EG : GD = 1 : 3 と EH : HD = 2 : 3 から EG : GH : HD = 5 : 3 : 12 と求めるのではなかろうか。

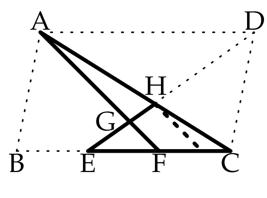
しかし，問題の図の中に「**メネラウスの図形**」が含まれていることに気が付けば（右図参照），



$$\frac{\text{CF}}{\text{FE}} \times \frac{\text{EG}}{\text{GH}} \times \frac{\text{HA}}{\text{AC}} = \frac{1}{1} \times \frac{\text{EG}}{\text{GH}} \times \frac{3}{5} = 1$$

より EG : GH = 5 : 3 と求めることもできる。

もちろん，例えば右の図のような補助線を引いて解くことも可能である。だがこれは,〔証明 1〕の補助線を引いたに過ぎず，本質的には「メネラウスの定理」を使った解法と同じと言える。



§ 3.　チェバの定理

チェバ（Giovanni Ceva，1647–1734，イタリア）は，ギリシャの幾何学を近代的な方法で研究した数学者である。約 1600 年もの間人々から忘れ去られていた「メネラウスの定理」を再発見し，それを拡張して「チェバの定理」に至ったらしい。

§ 3.1　「チェバの定理」とその証明

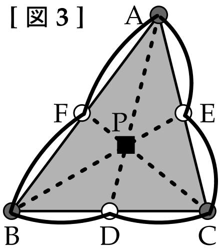
チェバの定理

点 P は，△ABC の辺をなす 3 直線 BC，CA，AB のいずれの上にもないものとする〔注 1〕。また，AP と BC，BP と CA，CP と AB がいずれも交わるとき〔注 2〕，それらの交点をそれぞれ D，E，F とする。このとき，等式

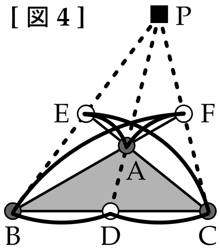
$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

が成り立つ〔注 3〕。

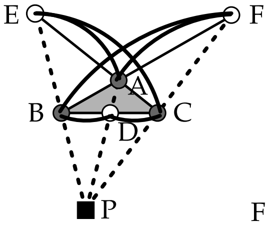
[図 3]



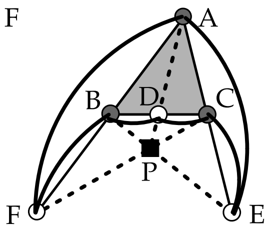
[図 4]



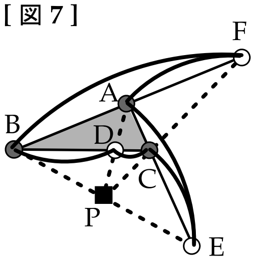
[図 5]



[図 6]



[図 7]



（以下，本稿では，上記における △ABC を「**チェバ三角形**」と呼び，図中ではその内部を塗りつぶし，その各頂点を●印で表す。また，点 P を「**チェバ点**」と呼び，図中では■印で表す。そして，3 直線 AP，BP，CP を「**チェバ線**」と呼び，図中では太い点線で表す。さらに，AP と BC の交点，BP と CA の交点，CP と AB の交点（すなわち，3 点 D，E，F）を「**チェバ線の足**」と呼び，図中では○印で表す。）

〔注 1〕　点 **P** が △ABC の辺をなす **3** 直線 **BC**，**CA**，**AB** のいずれの上にあると，**3** 点 **D**，**E**，**F** のうちの **2** つが △ABC の頂点と一致し，等式の分母に 0 が出てきてしまうので，この条件によってそれを除外する必要がある。

〔注 2〕　**AP** と **BC**，**BP** と **CA**，**CP** と **AB** のいずれかが平行だと，**3** 点 **D**，**E**，**F** のいずれかが存在しないので，この条件によってそれを除外する必要がある。（なお，そうなってしまうのは点 **P** が「**A** を通り **BC** に平行な直線」，「**B** を通り **CA** に平行な直線」，「**C** を通り **AB** に平行な直線」のいずれかの上にある場合である。）

〔注 3〕　ここでは「始めに点 **P** ありき」というスタイルで「チェバの定理」を記述したが，その場合は〔注 **1**〕，〔注 **2**〕のような場合を除外する必要があり，鬱陶しい。後ほど，この定理を「始めに **3** 点 **D**，**E**，**F** ありき」という表現に書き換えることにする。（→ § **4.**）

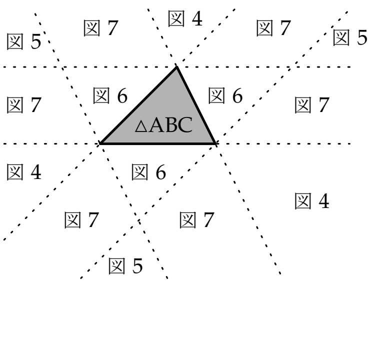
「チェバ三角形」と「チェバ点」と「チェバ線」の位置関係は，**[図 3]** 〜 **[図 7]** の 5 種類のパターンがある（ただし，いずれの図も，各点のアルファベットの与え方は一例に過ぎない）。具体的には，チェバ点 P が △ABC の内側にあるときは，**[図 3]** のように，3 点 D，E，F がすべて辺の内分点となり，また，チェバ点 P が △ABC の外側にあるときは，**[図 4]** 〜 **[図 7]** のように，3 点 D，E，F のうちの 1 つだけが辺の内分点で，他の 2 つは辺の外分点となる。**くれぐれも，[図 3] の場合にしか触れないような教え方は避けたい。**

これらの図を黒板で板書する際には，3 色（例えば黄色と青色と赤色）のチョークを使い，「チェバ三角形（△ABC）」を構成する 3 直線 AB，BC，CA とその各頂点 A，B，C（●）を **黄色** で，「チェバ点（■）」と「チェバの線」と「チェバ線の足（○）」を **青色** で，そして「点の辿り方」を **赤色** で，などと色を使い分けるとよい（その単元の学習中は，常に同じ色使いで統一すること）。そのとき，板書した等式 $\left(\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\times\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1\right)$ 内のアルファベットも，A と B と C を **黄色** で，そして D と E と F を **青色** で書くことにより，「点の辿り方」が理解しやすくなる。

なお，チェバ点 P（■印）は等式には使われないことにも触れた方がよいだろう。

（注）　「チェバ三角形」と「チェバ点」と「チェバ線」の位置関係にこれほど多様なバリエーションが存在することは，どうやらほとんど知られていないようである（少なくとも私は，今まで [図 7] を紹介している本に一度も出会ったことがない）。

具体的には，チェバ点 **P** が △ABC の外部にあるとき，点 **P** が次の図のどの領域にあるかによって **[図 4]** 〜 **[図 7]** の **4** パターンに分かれる。



（左図の領域の境界線は，「チェバの定理の成立条件に当てはまらない点 **P** の位置の集合」である。上の〔注 **1**〕，〔注 **2**〕を参照。）

なお，「体系数学 II 幾何編」には [図 3] と [図 6] の場合しか載っておらず，しかもそれだけで十分であるかのように誤解を与える説明が書かれているので，十分な注意を要する。

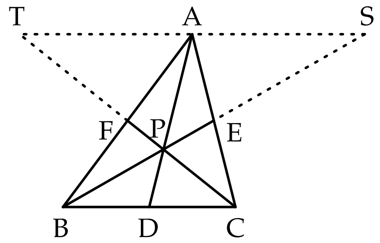
さて，証明だが，ここでは平行線を補助線として使う方法（→〔証明 1〕）と，「メネラウスの定理」を利用する補助線いらずの方法（→〔証明 2〕）を紹介する。どちらの証明も **[図 3]** 〜 **[図 7]** の場合に依らないが，下では **[図 3]** の場合の図だけ与えておく。（生徒には **[図 4]** 〜 **[図 7]** の場合の証明も考えさせたい。）

〔チェバの定理の証明 1〕

A を通り BC に平行な直線を引き，直線 BE との交点を S，直線 CF との交点を T とする。このとき，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{BC}} \times \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AT}} \times \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{SA}} = 1$$

となる。 **〔証明終〕**



〔チェバの定理の証明 2〕

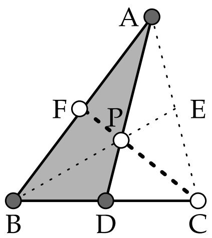
メネラウスの定理より，

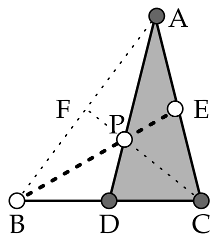
$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} \times \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}} = 1,$$
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1.$$

この 2 式を辺々かけて整理すれば，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

となる。 **〔証明終〕**





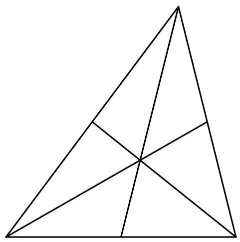
〔証明 2〕の通り，「チェバの定理」は「メネラウスの定理」から即座に導かれるのである。しかもその方法がそれほど技巧的でもないので，私はメネラウスがこの結論を知っていたとしてもまったく不思議ではないと思う。

また，〔証明 2〕は，「チェバの定理で求められる線分比は，メネラウスの定理を 2 回適用して求めることができる」ということを意味している。（→§ 3.4）

なお，**「体系数学 II 幾何編」の証明はこのいずれでもなく，面積を利用する方法である。**その証明は，ここでは割愛する。

§ 3.2 「チェバの定理」を使う基本例題：その 1

【 チェバの図形① 】

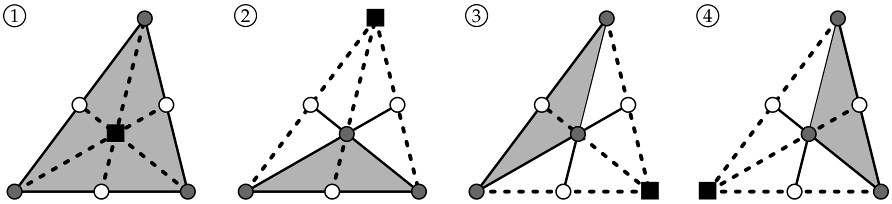


#11 ページの **[図 3]**，**[図 4]** は，いずれも右の図と同じ型をしている。以下，**本稿では**，この図を「**チェバの図形①**」と呼ぶことにしよう。

「**チェバの図形①**」は 6 本の直線で構成され，すべての直線上には交点が 3 つずつある。

「**チェバの図形①**」には交点が 7 個あるが，そのうちの 4 個が「3 直線の交点」，残りの 3 個が「2 直線の交点」である。

4 個の「3 直線の交点」のうちの 3 個を「チェバ三角形の頂点（●印）」，残りの 1 個を「チェバ点（■印）」とし，さらに，3 個の「2 直線の交点」を「チェバ線の足（○印）」とすると，次の 4 種類の「チェバ三角形」の図を描くことができる。

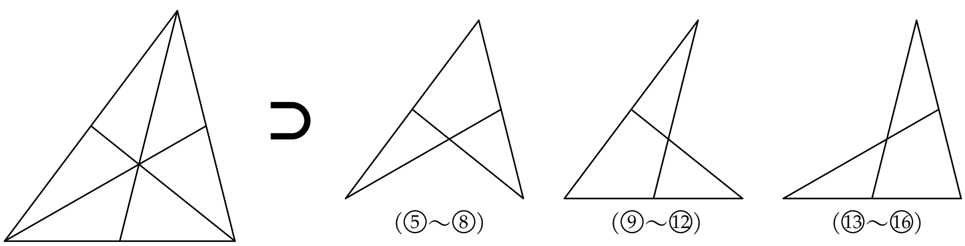


4 つの点から 3 つを選ぶ方法は ${}_4C_3$ 通り，すなわち 4 通りなので，「チェバ三角形」はこの ①～④ の 4 種類以外にはない。

ところで，6 本の直線から 3 本を選ぶ方法は ${}_6C_3$ 通り，すなわち 20 通りある。それをすべて図示すると **[次ページの図]** のようになる。

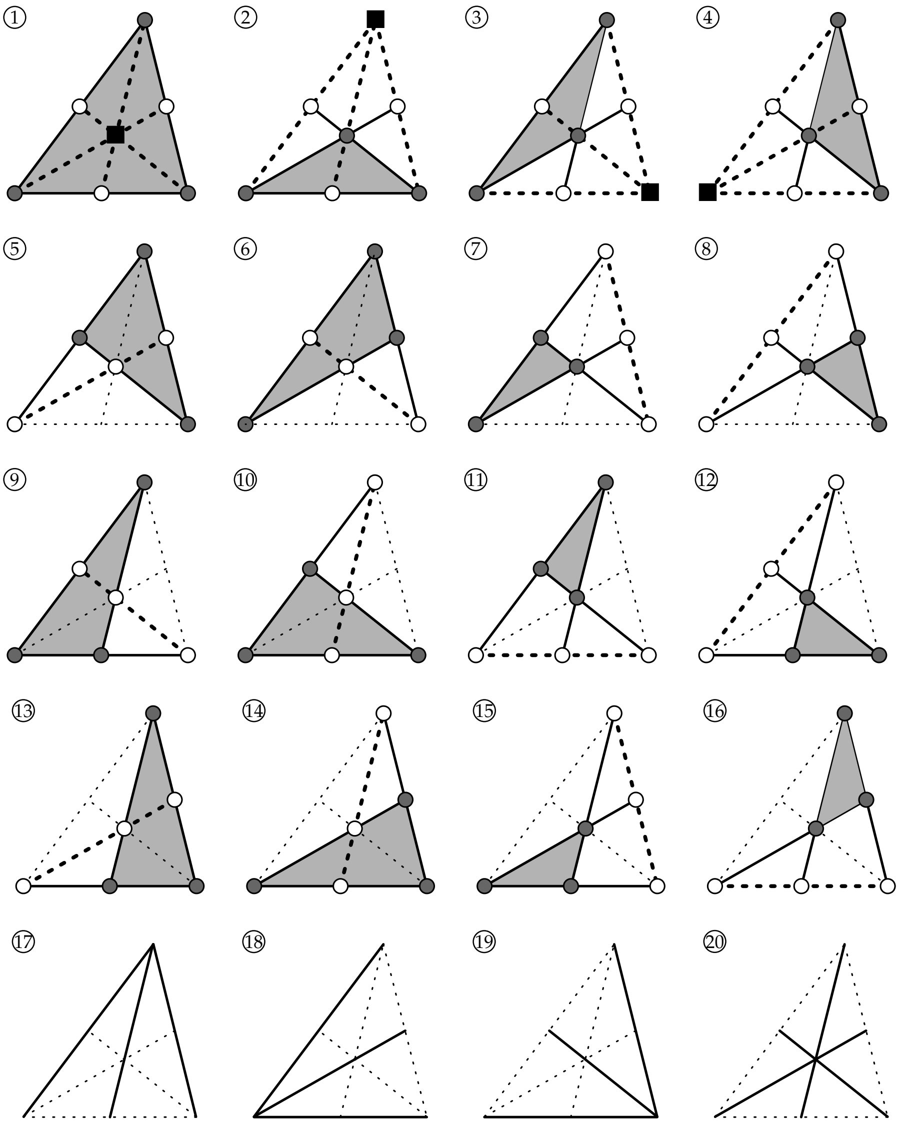
なお，「**チェバの図形①**」に次の 3 つの「**メネラウスの図形**」が含まれていることに注意すれば，⑤～⑧，⑨～⑫，⑬～⑯ はいずれも § 2.2 で述べたことを繰り返しているに過ぎない。

【 チェバの図形① 】　　　　【 メネラウスの図形 】



(⑤～⑧)　(⑨～⑫)　(⑬～⑯)

チェバの図形①内の 3 直線の選び方（全 20 通り）



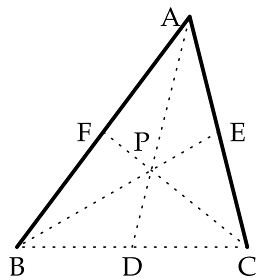
これらのうち，①〜④が「**チェバ三角形**」，⑤〜⑯が「**メネラウス三角形**」である。
残りの ⑰〜⑳ は 3 直線が「**共点**」となり，三角形が作られない。

さて，これらの「チェバ三角形」または「メネラウス三角形」に注目することによって，「**チェバの図形①**」の図の 2 直線について「線分比」が与えられたとき，残りの 4 直線についての「線分比」が求められる。「**チェバの図形①**」の問題は，「線分比を与えられる 2 直線の位置関係」によって 4 種類に分類することができるので，それらの具体例を以下に 1 題ずつ挙げ，かつ解法を紹介していくことにしよう（基本例題 B–1.〜基本例題 B–4.）。

基本例題 B–1.

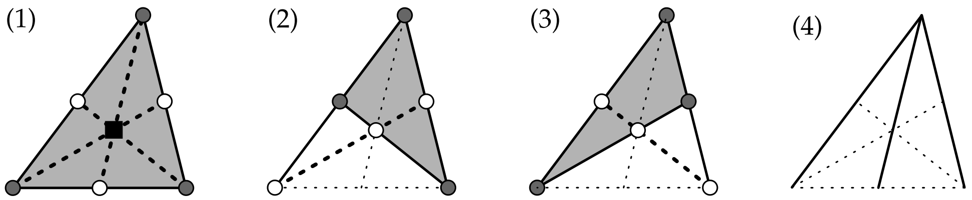
右図で，AF : FB = $x_1 : x_2$，AE : EC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) BD : DC を求めよ。
(2) FP : PC を求めよ。
(3) BP : PE を求めよ。
(4) AP : PD を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 3]** 型のチェバ三角形，(2) と (3) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形である。

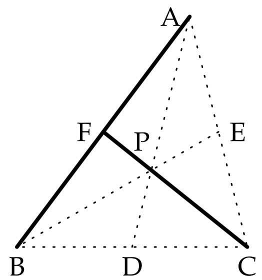


(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

基本例題 B–2.

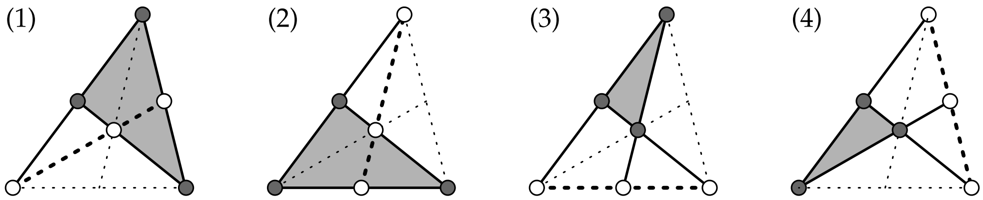
右図で，AF : FB = $x_1 : x_2$，FP : PC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) AE : EC を求めよ。
(2) BD : DC を求めよ。
(3) AP : PD を求めよ。
(4) BP : PE を求めよ。



（解法）

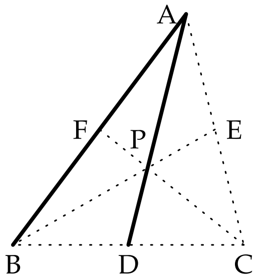
(1) と (2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) と (4) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。



基本例題 B–3.

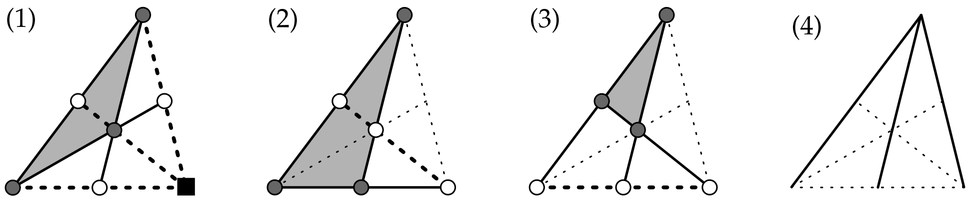
右図で，AF : FB = $x_1 : x_2$，AP : PD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) BP : PE を求めよ。
(2) BD : DC を求めよ。
(3) FP : PC を求めよ。
(4) AE : EC を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 4]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

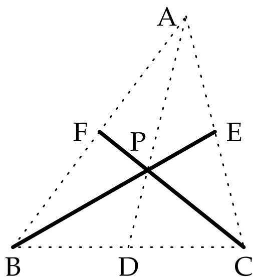


(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

基本例題 B–4.

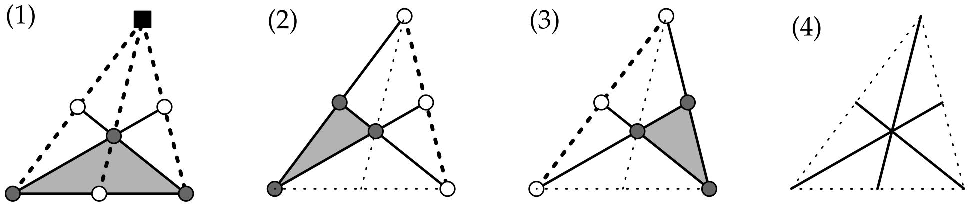
右図で，FP : PC = $x_1 : x_2$，BP : PE = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) BD : DC を求めよ。
(2) AF : FB を求めよ。
(3) AE : EC を求めよ。
(4) AP : PD を求めよ。



（解法）

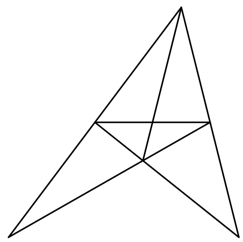
(1) は **[図 4]** 型のチェバ三角形，(2) と (3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。



(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

§ 3.3 「チェバの定理」を使う基本例題：その 2

【 チェバの図形② 】

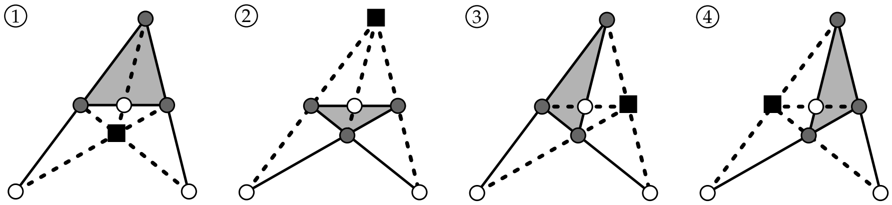


「チェバの定理」を使う問題としてはもう 1 つ，右の図の型も挙げなければならない（#11 ページの **[図 5]**，**[図 6]**，**[図 7]** の型）。以下，**本稿では**，この図を「**チェバの図形②**」と呼ぶことにしよう。

「チェバの図形①」と同様に，「**チェバの図形②**」も 6 本の直線で構成され，すべての直線上には交点が 3 つずつある。

「**チェバの図形②**」には交点が 7 個あるが，そのうちの 4 個が「3 直線の交点」，残りの 3 個が「2 直線の交点」である。

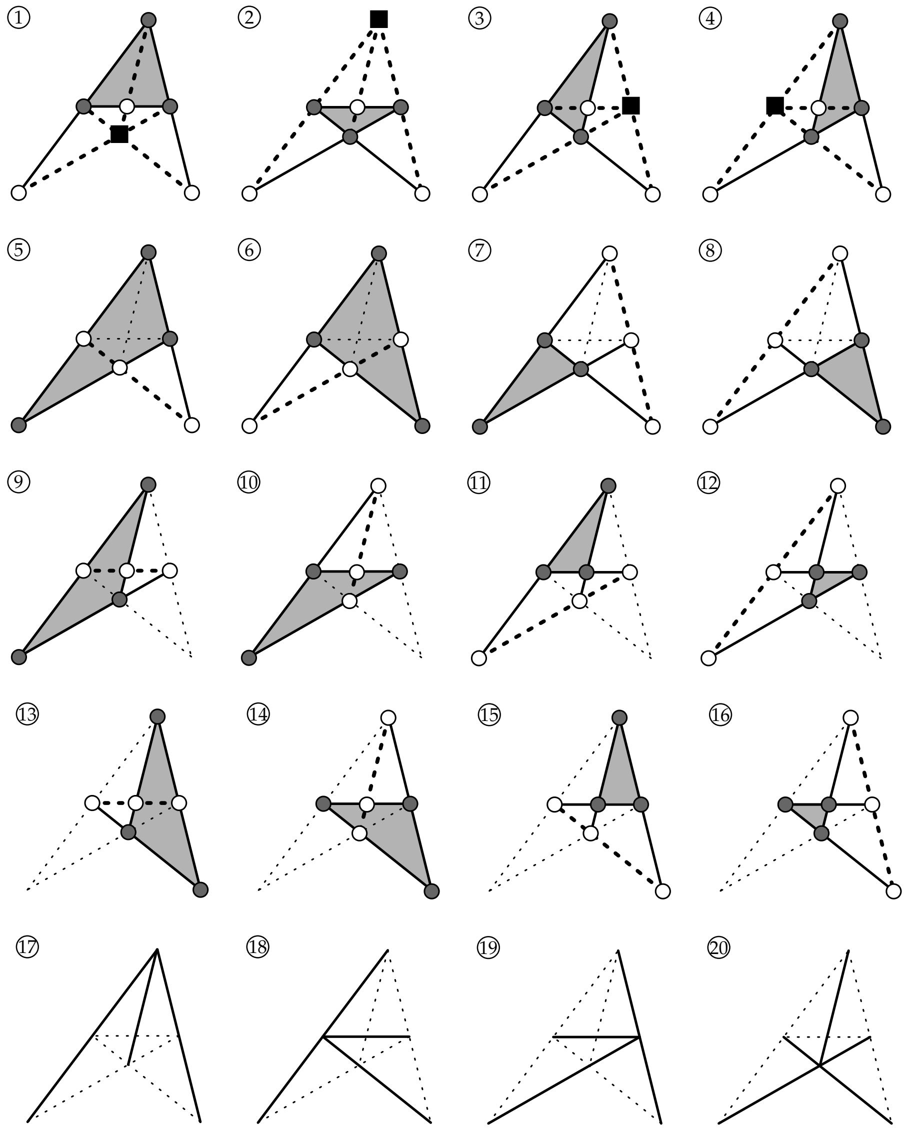
4 個の「3 直線の交点」のうちの 3 個を「チェバ三角形の頂点（●印）」，残りの 1 個を「チェバ点（■印）」とし，さらに，3 個の「2 直線の交点」を「チェバ線の足（○印）」とすると，次の 4 種類の「チェバ三角形」の図を描くことができる。



4 つの点から 3 つを選ぶ方法は $_4C_3$ 通り，すなわち 4 通りなので，「チェバ三角形」はこの ①〜④ の 4 種類以外にはない。

ところで，6 本の直線から 3 本を選ぶ方法は $_6C_3$ 通り，すなわち 20 通りある。それをすべて図示すると **[次ページの図]** のようになる。

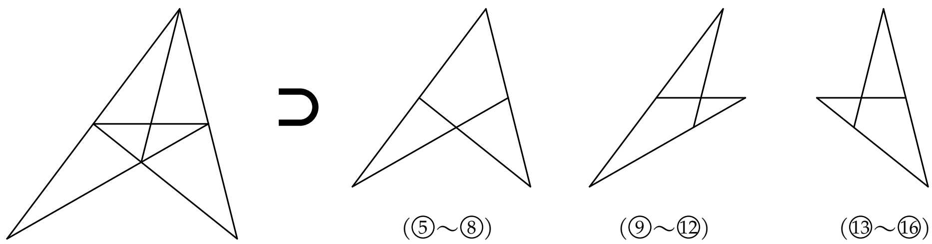
チェバの図形②内の 3 直線の選び方（全 20 通り）



これらのうち，①〜④が「**チェバ三角形**」，⑤〜⑯が「**メネラウス三角形**」である。
残りの ⑰〜⑳ は 3 直線が「**共点**」となり，三角形が作られない。

なお，「**チェバの図形②**」に次の 3 つの「**メネラウスの図形**」が含まれていることに注意すれば，⑤〜⑧，⑨〜⑫，⑬〜⑯ はいずれも § 2.2 で述べたことを繰り返しているに過ぎない。

【 チェバの図形② 】　　　　　　【 メネラウスの図形 】



(⑤〜⑧)　(⑨〜⑫)　(⑬〜⑯)

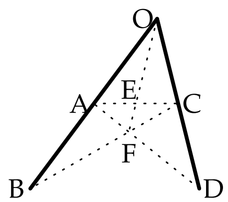
さて，これらの「チェバ三角形」または「メネラウス三角形」に注目することによって，「**チェバの図形②**」の図の 2 直線について「線分比」が与えられたとき，残りの 4 直線についての「線分比」が求められる。「**チェバの図形②**」の問題は「**チェバの図形①**」の問題よりも複雑で，「線分比を与えられる 2 直線の位置関係」によって 9 種類に分類することができる。それらの具体例を以下に 1 題ずつ挙げる。（基本例題 C–1.〜基本例題 C–9.）。

基本例題 C–1.

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，OC : CD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) AE : EC を求めよ。　(2) AF : FD を求めよ。

(3) BF : FC を求めよ。　(4) OE : EF を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 6]** 型のチェバ三角形，(2) と (3) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形である。

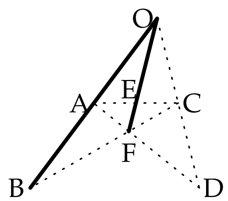
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

基本例題 C–2.

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，OE : EF = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) AF : FD を求めよ。　(2) BF : FC を求めよ。

(3) AE : EC を求めよ。　(4) OC : CD を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 7]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネ

ラウス三角形である。

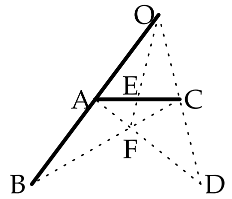
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

基本例題 C–3.

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，AE : EC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OC : CD を求めよ。　(2) BF : FC を求めよ。

(3) OE : EF を求めよ。　(4) AF : FD を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 6]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

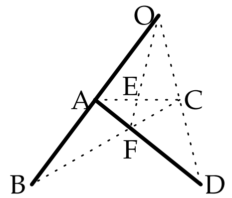
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

基本例題 C–4.

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，AF : FD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OE : EF を求めよ。　(2) OC : CD を求めよ。

(3) BF : FC を求めよ。　(4) AE : EC を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 7]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

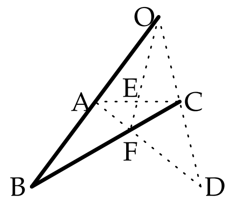
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

基本例題 C–5.

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，BF : FC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OC : CD を求めよ。　(2) OE : EF を求めよ。

(3) AE : EC を求めよ。　(4) AF : FD を求めよ。



（解法）

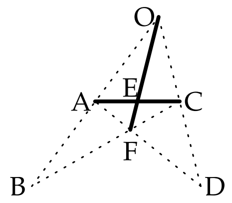
(1) と (2) と (3) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(4) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

基本例題 C–6.

右図で，OE : EF = $x_1 : x_2$，AE : EC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OA : AB を求めよ。　(2) OC : CD を求めよ。

(3) AF : FD を求めよ。　(4) BF : FC を求めよ。



（解法）

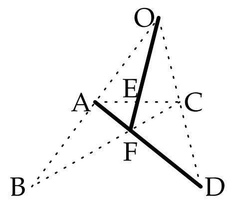
(1) から (4) まで，すべて **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

基本例題 C–7.

右図で，OE : EF = $x_1 : x_2$，AF : FD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OA : AB を求めよ。　(2) OC : CD を求めよ。

(3) AE : EC を求めよ。　(4) BF : FC を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 7]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

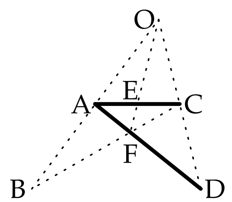
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

基本例題 C–8.

右図で，AE : EC = $x_1 : x_2$，AF : FD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) BF : FC を求めよ。　(2) OC : CD を求めよ。

(3) OE : EF を求めよ。　(4) OA : AB を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 5]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

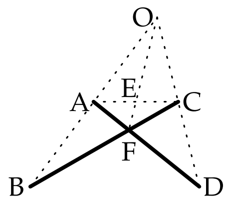
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

基本例題 C–9.

右図で，AF : FD = $x_1 : x_2$，BF : FC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) AE : EC を求めよ。　(2) OA : AB を求めよ。

(3) OC : CD を求めよ。　(4) OE : EF を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 5]** 型のチェバ三角形，(2) と (3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。（しかし，他の解法もある。 → § 5.）

§ 3.4　「チェバの定理」を使わずに解く

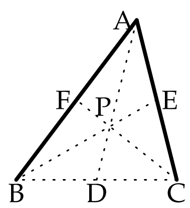
#13 ページの〔チェバの定理の証明 2〕のところでも触れた通り，「チェバの定理」で求められる線分比は，「メネラウスの定理」を 2 回適用して求めることができる。

ここでは，§ 3.2 と § 3.3 で「チェバ三角形に注目して解く」とした問題を，「メネラウスの定理」を 2 回適用して実際に求めてみたい。（ただし，あまり多くの例をあげる必要はないと思うので，2 題だけにとどめる。）

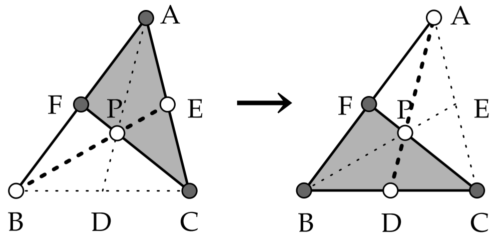
基本例題 B–1.（再掲）

右図で，AF : FB = $x_1 : x_2$，AE : EC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) BD : DC を求めよ。



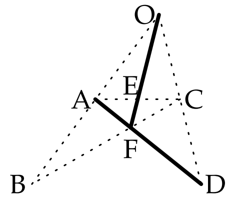
（別解）　まず下図左のように △ACF を「メネラウス三角形」と見立てて FP : PC を求めてから，その次に，下図右のように △BCF を「メネラウス三角形」と見立てて BD : DC を求める。



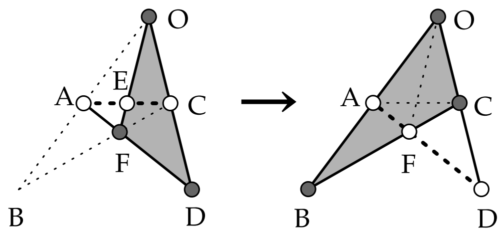
基本例題 C–7. （再掲）

右図で，OE : EF = $x_1 : x_2$，AF : FD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(1) OA : AB を求めよ。



（別解）　まず下図左のように △ODF を「メネラウス三角形」と見立てて OC : CD を求めてから，その次に，下図右のように △OBC を「メネラウス三角形」と見立てて 右の「メネラウス三角形」で OA : AB を求める。



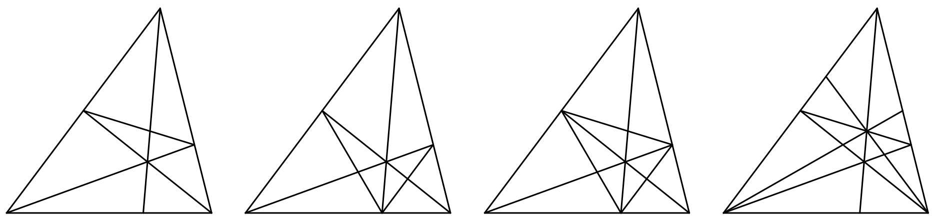
このように，「チェバの定理」で求められる線分比は，「メネラウスの定理」を 2 回適用して求めることができるのである。このことからも，「メネラウスの定理」の方が「チェバの定理」よりも基本的であることがわかる。

もしかすると，このことから「チェバの定理は教える必要がない」と考える人もいるかもしれない。しかし，すぐあとの § 4. で見る通り，この両定理の「逆」は教えるべきなので，上記の考察だけで「チェバの定理は不要」と断じるのは早計である。

そして何より，「使える・使えない」という価値観だけでなく，「メネラウスの定理とチェバの定理の類似性の美しさを生徒に伝えたい」という気持ちを大切にしたい。

§ 3.5　「基本例題 B〜C」の応用例

例えば，以下にあげるいくつかの図形は，いずれも § 3.2 の「**チェバの図形①**」と § 3.3 の「**チェバの図形②**」を組み合わせたものである。

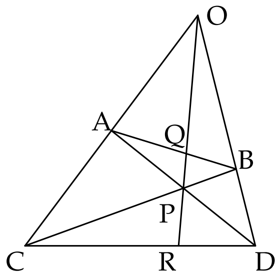


一見すると複雑な図そうに見えても，これらの図形の中に隠れている「**チェバの図形①**」と「**チェバの図形②**」をうまくみつけることさえできれば，あとは **基本例題 B–1.** ～ **基本例題 B–4.** および **基本例題 C–1.** ～ **基本例題 C–9.** の解法を繰り返し用いるだけで，さまざまな線分比を求めることが可能になる。

問題 2.

右図で，$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ であるとき，

(1) $\overrightarrow{OP}$ を，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ。
(2) $\overrightarrow{OQ}$ を，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ。
(3) $\overrightarrow{OR}$ を，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ。
(4) OQ : QR を求めよ。



「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を繰り返し用いる解法を，ベクトルの単元で学習するような標準的な解法と比べてみれば，いかに「メネラウスの定理」と「チェバの定理」が強力な道具であるかを実感できると思う。

なお，(4) の解法については § 5. も参照のこと。（→ #42 ページ）

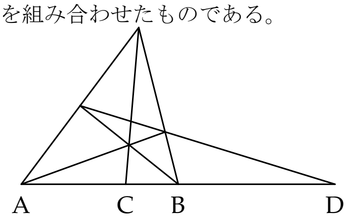
余談

次の図は，「**チェバの図形①**」と「**チェバの図形②**」を組み合わせたものである。

この図中の 4 点 A，B，C，D に対して

$$AC : CB = AD : DB$$

という関係式が成り立っていることは，メネラウスの定理とチェバの定理から容易に確認できる。



線分 AB とその内分点 C が与えられたとき，上の図によって AC : CB = AD : DB を満たす外分点 D を作図することができる。逆に，線分 AB とその外分点 D が与えられたときも，同様に AD : DB = AC : CB を満たす内分点 C を作図することが可能である。

ちなみに，同一直線上の 4 点 A，B，C，D の間にこの関係式が成り立つとき，その 4 点を**調和点列**といい，また 2 点 C，D を **2 点 A，B に関して互いに調和共役な点**という。（これは，「射影幾何」を考える上でかかせない概念である。）

§ 4. 「メネラウスの定理の逆」と「チェバの定理の逆」

「メネラウスの定理」と「チェバの定理」の逆を考えることは，それほど容易ではない。特に「チェバの定理の逆」については，誤った表記で紹介している本も少なくない（**「体系数学 II 幾何編」の「チェバの定理の逆」も誤っているのだが，誤った証明まで載せてあり，うっかりすると信じてしまいそうである**)。

「メネラウスの定理の逆」は「3 点が共線であること」を証明する問題に，そして「チェバの定理の逆」は「3 直線が共点であること」を証明する問題に欠かせない定理となるので，これらを正しく理解することはとても重要である。

§ 4.1 「メネラウスの定理」と「チェバの定理」の言い換え

§ 2.1 の〔注 3〕(#5 ページ）と § 3.1 の〔注 3〕(#12 ページ）で指摘した通り，「始めに直線 ℓ ありき」，「始めに点 P ありき」という両定理の書き方は，とてもわずらわしい問題を含んでいる。なので，定理の「逆」を考える前に，両定理を「始めに 3 点 D，E，F ありき」という表現に書き換えておく。(そして，そのように書き換えることで，両定理がそれぞれ「共線」，「共点」に関する定理であることが明確になる。)

定理の言い換え

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の 内分点 または 外分点 とするとき〔注〕，

メネラウスの定理

3 点 D，E，F が共線である（この仮定を **[P1a]** とする）

$\Longrightarrow$ 等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つ。(この結論を **[P2]** とする）

チェバの定理

3 直線 AD，BE，CF が共点である（この仮定を **[P1b]** とする）

$\Longrightarrow$ 等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つ。(この結論は，上の **[P2]** と同じ）

〔注〕 **「内分点」，「外分点」という表現により，3 点 D，E，F が △ABC の頂点 A，B，C と一致する場合を除外している。**

さて，どちらの定理の結論も「等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つ（**[P2]**)」 となっていることからわかる通り，**[P1a] も [P1b] も，[P2] であるための「十分条件」ではあるが，し**

かし「必要条件」ではない。したがって，**単に仮定と結論を単純に入れ替えた命題は「偽」である。**

ところで，次のことが成り立つのは明らかである（……と言っても，手を動かして確かめることは容易だが，証明するのは煩わしい）。

> 3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とするとき，
>
> - 3 点 D，E，F が共線である（ **[P1a]** ）
> $\Longrightarrow$ 3 点 D，E，F のうちの 2 個または 0 個（すなわち偶数個）が △ABC の辺の内分点で，残りの 1 個または 3 個（すなわち奇数個）が辺の外分点となる。（この結論を **[P3a]** とする）
> - 3 直線 AD，BE，CF が共点である（ **[P1b]** ）
> $\Longrightarrow$ 3 点 D，E，F のうちの 3 個または 1 個（すなわち奇数個）が △ABC の辺の内分点で，残りの 0 個または 2 個（すなわち偶数個）が辺の外分点となる。（この結論を **[P3b]** とする）

両定理の逆を導くためには，これを利用する必要がある。

§ 4.2　メネラウスの定理の逆

§ 4.1 で見た通り，仮定 **[P1a]** から 2 つの結論 **[P2]**，**[P3a]** が導かれるので，それをまとめると

$$\textbf{[P1a]} \Longrightarrow \textbf{[P2]} \wedge \textbf{[P3a]}$$

となる。そして，これの逆

$$\textbf{[P2]} \wedge \textbf{[P3a]} \Longrightarrow \textbf{[P1a]}$$

が成り立つ。通常，これを「**メネラウスの定理の逆**」と呼ぶ。（これを日本語に戻すと，次のようになる；下線部 が **[P3a]** ）

> **メネラウスの定理の逆**
>
> 3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。それらのうちの 偶数個が内分点，奇数個が外分点 で，かつ，等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つならば，3 点 D，E，F が共線である。

また，「**[P1a]** $\Longrightarrow$ **[P2]** $\land$ **[P3a]**」と「**[P2]** $\land$ **[P3a]** $\Longrightarrow$ **[P1a]**」 を合わせた

$$\textbf{[P1a]} \iff \textbf{[P2]} \land \textbf{[P3a]}$$

を「メネラウスの定理」と呼ぶこともある。（これを日本語に戻すと，次のようになる；下線部が **[P3a]** ）

メネラウスの定理（必要十分バージョン①）

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。このとき，**次の 2 つは同値（必要十分）である**；

[1] 3 点 D，E，F が共線である。
[2] 3 点 D，E，F のうちの 偶数個が内分点，奇数個が外分点 で，かつ，等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つ。

あるいは，**[P3a]** を「定理成立の前提条件」に含めてしまう次のような書き方も一般的である。（下線部 が **[P3a]** ）

メネラウスの定理（必要十分バージョン②）

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。そのうちの偶数個が内分点，奇数個が外分点 であるとき，**次の 2 つは同値（必要十分）である**；

[1] 3 点 D，E，F が共線である。
[2] 等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つ。

§ 4.3　チェバの定理の逆

§ 4.1 で見た通り，仮定 **[P1b]** から 2 つの結論 **[P2]**，**[P3b]** が導かれるので，それをまとめると

$$\textbf{[P1b]} \Longrightarrow \textbf{[P2]} \land \textbf{[P3b]}$$

となる。しかし，**メネラウスの定理のときと異なり**，**これの逆**

$$\textbf{[P2]} \land \textbf{[P3b]} \Longrightarrow \textbf{[P1b]}$$

は **成り立たない**。すなわち，**「[P1b]」と「[P2] ∧ [P3b]」は同値（必要十分）ではない**。

したがって，**次の「チェバの定理の逆」は誤りである！**

正しくない「チェバの定理の逆」

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。それらのうちの奇数個が内分点，偶数個が外分点で，かつ，等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つならば，3 直線 AD，BE，CF は共点である。**（→これは誤り）**

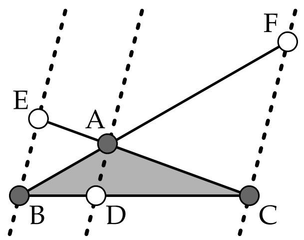
残念なことに，「チェバの定理の逆」をこのように間違えてしまっている問題集が少なくない（**「体系数学 II 幾何編」もこのように間違えている**）。

上の主張が成り立たないことを見るには，反例をあげれば十分である。

反例

右の図で，D は辺 AB の内分点，E は辺 BC の外分点，F は辺 AB の外分点である。すなわち，3 点 D，E，F のうちの 1 個（奇数個）が辺の内分点で，2 個（偶数個）が辺の外分点である。

ここで，もし BA : AF = EA : AC = BD : DC だとすれば $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つが，しかしこのとき 3 直線 AD，BE，CF はすべて平行で，共点ではない。



このように，**3 直線 AD，BE，CF が（共点ではなく）すべて平行になってしまう場合がある**のだ。

（補足）　「平行線は無限遠点で交っている」と考えればこれは反例ではなくなるが，中学〜高校の授業では普通はそのようには扱わない。

しかし，3 直線 AD，BE，CF が共点でない場合には必ずすべて平行になるので，

「3 直線 AD，BE，CF がすべて平行である」

という命題を **[P1b′]** として，

$$\textbf{[P2]} \wedge \textbf{[P3b]} \implies \textbf{[P1b]} \vee \textbf{[P1b′]}$$

を考えれば，これは「真」となる。通常，これを「**チェバの定理の逆**」と呼ぶ。（これを日本語に戻すと，次のようになる。下線部 が **[P1b′]** である）

チェバの定理の逆①

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。それらのうちの偶数個が内分点，奇数個が外分点で，かつ，等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つならば，3 直線 AD，BE，CF は共点か，または すべて平行 である。

あるいは，「チェバの定理の逆」を「共点であることを証明するために使うもの」として捉え，次のように表現する問題集もある。（仮定に 下線部 を追加することで，3 直線がすべて平行になる場合をあらかじめ除外してしまう）

チェバの定理の逆②

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。それらのうちの偶数個が内分点，奇数個が外分点で，BE と CF が点 P で交わり，かつ，等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つならば，直線 AD も点 P で交わる（すなわち 3 直線 AD，BE，CF は共点である）。

なお，問題集によっては，「チェバの定理の逆」を 3 点 D，E，F がいずれも辺の 内分点 である場合のみに限定してしまう次のスタイルを採用している。（3 点 D，E，F がすべて内分点であれば，すぐ下に示すように，BE と CF は平行にはならず，3 直線 AD，BE，CF は必ず共点になる。）ただし，使い勝手がよい反面，使用範囲は狭くなっているので，個人的にはこれを「チェバの定理の逆」と呼ぶことには抵抗がある。

チェバの定理の逆：簡略バージョン

3 点 D，E，F がそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の 内分点 で，かつ，等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つならば，3 直線 AD，BE，CF は共点である。

（3 点 D，E，F がすべて内分点のときに，BE と CF が平行にはならないことの証明）

2 直線 BE，CF と交わる直線 BC に対して，

$$\angle \mathrm{EBC} + \angle \mathrm{FCB} < \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB} < 180^\circ$$

であるから，ユークリッドの第 5 公準より，2 直線 BE，CF は直線 BC に対し E や F のある側で交わる。（証明終）

なお,「**[P1b]**∨**[P1b′]** $\Longrightarrow$ **[P2]**∧**[P3b]**」も成り立ち, 実は,「**[P1b]**∨**[P1b′]**」と「**[P2]**∧**[P3b]**」は**同値（必要十分）**であることが確かめられる。そして，

[P1b] ∨ **[P1b′]** $\Longleftrightarrow$ **[P2]** ∧ **[P3b]**

を「チェバの定理」と呼ぶこともある。これを日本語に戻すと，次のようになる；

チェバの定理（必要十分バージョン①）

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。このとき，**次の 2 つは同値（必要十分）である**；

[1] 3 直線 AD，BE，CF が共点であるか，または 3 直線がすべて平行である。

[2] 3 点 D，E，F のうちの奇数個が内分点，偶数個が外分点で，かつ，等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つ。

あるいは，**[P3b]** を「定理成立の前提条件」に含めてしまう次のような書き方も一般的である。（下線部 が **[P3b]**）

チェバの定理（必要十分バージョン②）

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。そのうちの奇数個が内分点，偶数個が外分点 であるとき，**次の 2 つは同値（必要十分）である**；

[1] 3 直線 AD，BE，CF が共点であるか，または 3 直線がすべて平行である。

[2] 等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つ。

§ 4.1〜§ 4.3 のまとめ

3 点 D，E，F をそれぞれ $\triangle$ABC の 3 辺 BC，CA，AB の内分点または外分点とする。

[P1a]　3 点 D，E，F が共線である

[P1b]　3 直線 AD，BE，CF が共点である

[P1b']　3 直線 AD，BE，CF がすべて平行である

[P2]　等式 $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立つ

[P3a]　3 点 D，E，F のうちの 2 個または 0 個（すなわち偶数個）が $\triangle$ABC の辺の内分点で，残りの 1 個または 3 個（すなわち奇数個）が辺の外分点である

[P3b]　3 点 D，E，F のうちの 3 個または 1 個（すなわち奇数個）が $\triangle$ABC の辺の内分点で，残りの 0 個または 2 個（すなわち偶数個）が辺の外分点である

とすると，

メネラウスの定理　**[P1a]** $\Longrightarrow$ **[P2]**

メネラウスの定理の逆　**[P2]** $\land$ **[P3a]** $\Longrightarrow$ **[P1a]**

※「**[P1a]**」と「**[P2]** $\land$ **[P3a]**」は同値（必要十分）である。
この 2 つの命題が同値であることを「メネラウスの定理」と呼ぶこともある。

チェバの定理　**[P1b]** $\Longrightarrow$ **[P2]**

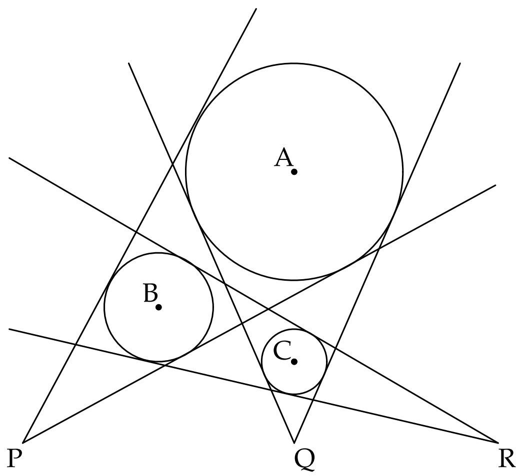
チェバの定理の逆　**[P2]** $\land$ **[P3b]** $\Longrightarrow$ **[P1b]** $\lor$ **[P1b′]**

※「**[P1b]** $\lor$ **[P1b′]**」と「**[P2]** $\land$ **[P3b]**」は同値（必要十分）である。
この 2 つの命題が同値であることを「チェバの定理」と呼ぶこともある。

§ 4.4 「メネラウスの定理の逆」の利用

既に述べた通り，「メネラウスの定理の逆」は「3 点が共線であること」を証明する問題に欠かせない定理となる。ここでは一例のみ挙げる。

問題 3. 次の図で，3 点 P，Q，R が共線であることを示せ。

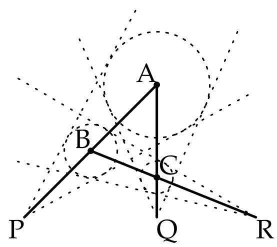


「3 点 P，Q，R が共線であることを示せ」という問題から「メネラウスの定理の逆が使えないだろうか？」と思いつくことさえできれば，次の証明を得るのは容易である。

（略証）

3 点 P，Q，R はそれぞれ線分 AB，AC，BC の延長上にある（すなわち，3 点 P，Q，R はすべて辺の外分点である）。
3 円 A，B，C の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とすると，

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = r_1 : r_2,$$
$$\mathrm{BR} : \mathrm{CR} = r_2 : r_3,$$
$$\mathrm{CQ} : \mathrm{AQ} = r_3 : r_1.$$



したがって，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \times \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = \frac{r_1}{r_2} \times \frac{r_2}{r_3} \times \frac{r_3}{r_1} = 1.$$

よって，メネラウスの定理の逆より，3 点 P，Q，R は共線である。 （証明終）

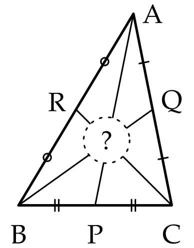
§ 4.5　「チェバの定理の逆」の利用

既に述べた通り，「チェバの定理の逆」は「3 直線が共点であること」を証明する問題に欠かせない定理となる。ここでは，三角形の 重心，垂心，そして 内心 の存在を，「チェバの定理の逆」を用いて示す。（外心に関しては，「チェバの定理の逆」では証明できない。）

以下の証明では，厳密に書こうとすると冗長となる部分については証明内では深入りせず，注釈を添えるにとどめた。

問題 4.（重心の存在）

△ABC において，3 辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，3 直線 AP，BQ，CR が共点となることを示せ。



（略証）

3 点 P，Q，R はすべて辺の内分点である。

題意より，AR : BR = BP : CP = CQ : AQ = 1 : 1．したがって，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} \times \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 1.$$

また，明らかに AP と BQ と CR は平行ではない。〔注〕

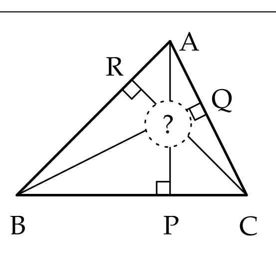
よって，チェバの定理の逆より，3 直線 AP，BQ，CR は共点である。　（証明終）

〔注〕　3 点 P，Q，R が 3 つともすべて辺の 内分点 のときに BQ と CR が平行にならない理由は，#30 ページで示した通りである。しかし，中高生に対しては，「明らかに」で済ませてよいと思う。

なお，蛇足だが，重心が中線をすべて 2 : 1 の比に分けることは，メネラウスの定理から即座に求められる。

問題 5.（垂心の存在）

△ABC において，3 頂点 A，B，C からそれぞれ対辺 BC，CA，AB に垂線を引き，その垂線の足をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，3 直線 AP，BQ，CR が共点となることを示せ。



（略証）

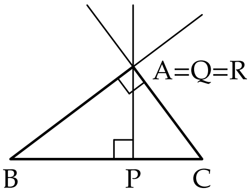
　△ABC が直角三角形の場合とそうでない場合を別々に考える。
（なぜなら，直角三角形の場合には「チェバの定理の逆」が使えないため。）

・△ABC が直角三角形のとき

　$\angle A = 90°$ であると仮定しても一般性は失われない。

　このとき，頂点 B から辺 AC に下ろした垂線の足 Q と頂点 C から辺 AB に下ろした垂線の足 R は，いずれも点 A と重なり，したがって，直線 BQ は AB に，直線 CR は AC に，それぞれ一致する。すなわち，3 直線 AP，BQ，CR とは 3 直線 AP，AB，AC のことであり，これらは明らかに 1 点 A で交わる。つまり，3 直線 AP，BQ，CR は共点である。

[直角三角形の場合]

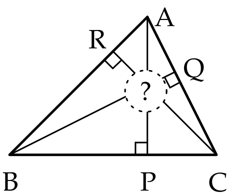


・△ABC が直角三角形ではないとき

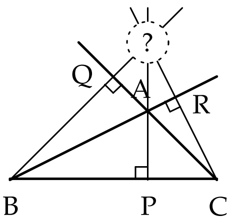
　鋭角三角形の場合，3 点 P，Q，R はすべて辺の内分点である。

　鈍角三角形の場合，例えば $\angle A > 90°$ の場合，P のみ辺の内分点で，Q と R は辺の外分点となる。

[鋭角三角形の場合]



[鈍角三角形の場合]



　鋭角三角形の場合も鈍角三角形の場合も，△CAR ∽ △BAQ，△ABP ∽ △CBR，△BCQ ∽ △ACP より

$$AR : AQ = AC : AB, \quad BP : BR = BA : BC, \quad CQ : CP = CB : CA$$

が成り立つ。したがって，

$$\frac{AR}{RB} \times \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{QA} \times \frac{BP}{RB} \times \frac{CQ}{PC} = \frac{AC}{AB} \times \frac{BA}{BC} \times \frac{CB}{CA} = 1.$$

また，明らかに AP と BQ と CR は平行ではない。〔注〕

よって，チェバの定理の逆より，3 直線 AP，BQ，CR は共点である。　　　（証明終）

〔注〕 △ABC が鋭角三角形の場合は 3 点 P, Q, R がすべて辺の内分点となるので, **問題 4.（重心の存在）**のときと同様に BQ と CR が平行でないと言える。
しかし，△ABC が鈍角三角形の場合は，例えば $\angle A > 90°$ の場合は P だけが辺の内分点で Q と R は辺の外分点となるので，BQ と CR が平行でない証明が新たに必要である。

（$\triangle$ABC が $\angle$A > 90° の鈍角三角形のとき，BQ と CR が平行でないことの証明）

$\triangle$QBC に注目すると $\angle$QBC < 90° であることがわかる。同様に，$\triangle$RCB に注目すると $\angle$RCB < 90° であることがわかる。したがって，

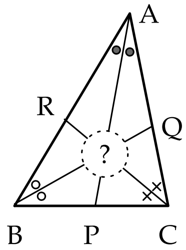
$$\angle \mathrm{QBC} + \angle \mathrm{RCB} < 180^\circ$$

であるから，ユークリッドの第 5 公準より，2 直線 BQ，CR は直線 BC に対し Q や R のある側で交わる。（証明終）

しかし，中高生に対してはこれほどの大げさなことをせずに「明らかに」で済ませてよいと思う。

問題 6.（内心の存在）

$\triangle$ABC において，$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C それぞれの二等分線と対辺 BC，CA，AB との交点を，それぞれ P，Q，R とする。このとき，3 直線 AP，BQ，CR が共点となることを示せ。



（略証）

3 点 P，Q，R はすべて辺の内分点である。

$\angle$PAB = $\angle$PAC，$\angle$QBC = $\angle$QBA，$\angle$RCA = $\angle$RCB より

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}, \quad \mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = \mathrm{BC} : \mathrm{BA}, \quad \mathrm{AR} : \mathrm{RB} = \mathrm{CA} : \mathrm{CB}.$$

したがって，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} \times \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} \times \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}} = 1.$$

また，明らかに AP と BQ と CR は平行ではない。〔注〕

よって，チェバの定理の逆より，3 直線 AP，BQ，CR は共点である。（証明終）

〔注〕 3 点 P，Q，R がすべて辺の内分点となるので，**問題 4.（重心の存在）**のときと同様に BQ と CR が平行でないと言える。

なお，「傍心の存在」も，大筋としては「内心の存在」とほとんど同様に考えることができる。しかし，厳密には細かいところで少々煩雑な場合分けが必要となってしまうので，「傍心の存在」を「チェバの定理の逆」を利用して証明するのはあまり現実的ではないと思われる。（例えば，$\angle$A = 80°，$\angle$B = $\angle$C = 50° である $\triangle$ABC の場合，$\angle$A の外角の二等分線は辺 BC と平行となってしまい，「チェバの定理の逆」で証明することができない。）

§ 5. 第 3 の定理

「メネラウスの定理」，「チェバの定理」に続く重要な定理がもう 1 つある。ただ，私は寡聞にしてこの定理の名前を知らないので，**本稿では** それを「**第 3 の定理**」と呼ぶことにする。

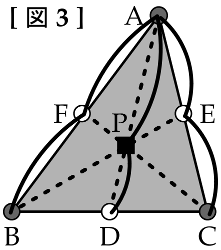
第 3 の定理

§ 3.1 の「チェバの定理」の用語を流用する。

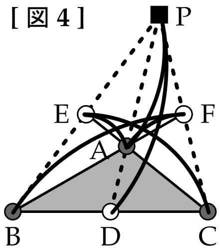
△ABC を「チェバ三角形」，点 P を「チェバ点」，そして 3 点 D，E，F を辺 BC，CA，AB 上の「チェバ線の足」とするとき，

- 点 D が辺 BC の **内分点** ならば，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} = \dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} + \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}$ （→下図を参照）
- 点 E が辺 CA の **内分点** ならば，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}} = \dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FA}} + \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$
- 点 F が辺 AB の **内分点** ならば，$\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PF}} = \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} + \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}$

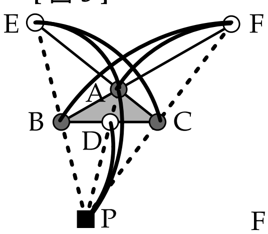
[図 3]



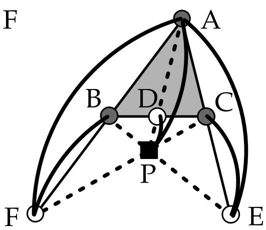
[図 4]



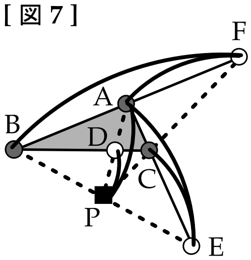
[図 5]



[図 6]



[図 7]



[図 3] は，3 点 D，E，F がいずれも内分点なので，3 式ともすべて成り立つ（ただし，上の図には「第 1 式の点の辿り方」のみ図示してある）。

[図 4] 〜 **[図 7]** は，D のみ内分点で E と F は外分点なので，第 1 式のみ成り立つ。

（補足）　**すぐ下の〔証明〕を見れば，それを少し修正するだけで，点 D や点 E や点 F が 外分点 の場合の公式を容易に作ることができる。しかし本稿では，それは割愛させていただく。**

次の証明は，いつものごとく **[図 3]** ～ **[図 7]** の場合に依らないのだが，下では **[図 3]** の場合の図だけ与えておく。

〔第 3 の定理の証明〕

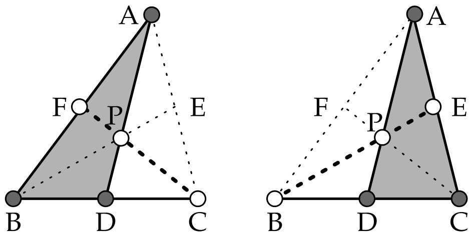
3 式とも同様に証明できるので，第 1 式のみ示す。

メネラウスの定理より $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \times \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} \times \dfrac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}} = 1$，したがって $\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CB}}$.

また，同じくメネラウスの定理より $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} \times \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}} \times \dfrac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}} = 1$，したがって $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}$.

この 2 式を辺々足すと，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} + \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} &= \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CB}} + \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}} \\
&= \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{\mathrm{BD}+\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}} \\
&= \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BC}} \\
&= \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}
\end{aligned}$$



となる。　**〔証明終〕**

（補足）　**証明中，BD + DC = BC のところで 点 D が内分点であること を使用している。**

「メネラウスの定理」と「チェバの定理」がよく知られているのとは対照的に，この「第 3 の定理」はほとんど知られていない。（実際，この定理を紹介している本を私は 1 冊しか知らない。そこに定理の名称が記されていなかったので，私はこの定理の名称を知らないのである。）**しかし，この定理も「メネラウスの定理」や「チェバの定理」と同様に，非常に有用である。**

「**チェバの図形①**」および「**チェバの図形②**」を構成する 6 本の直線から 3 本を選ぶ ${}_6C_3 = 20$ 通りの方法を，#15 ページと#19 ページにすべて図示した。そして，いずれの図形においても，それぞれ ①～④ には「チェバの定理」，⑤～⑯ には「メネラウスの定理」が適用できることを確認したが，実は，残りの ⑰～⑳ には，この「第 3 の定理」が適用できる。**つまり，この 3 つの定理によって，「チェバの図形①」および「チェバの図形②」の任意の 3 直線の線分比の関係が，すべて明らかになるのである。**

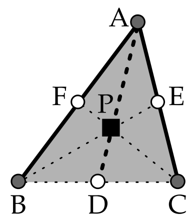
実用例を挙げると，§3.2 〜 §3.3 で挙げた基本例題 B–1. 〜 基本例題 C–9. のうち，「メネラウスの定理」と「チェバの定理」で求めようとすると 2 段階の作業が必要だった (4) の問題が，「第 3 の定理」を使えば 1 発で求めることが可能となる。

「第 3 の定理」を使いこなせるか否かは，適切な「チェバ三角形」を発見できるかどうかにかかっている。

基本例題 B–1.（再掲）

右図で，AF : FB = $x_1 : x_2$，AE : EC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4) AP : PD を求めよ。

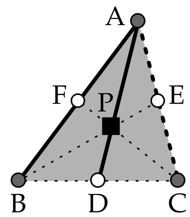


（解法） (4) $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AF}{FB} + \dfrac{AE}{EC}$ より（以下省略）

基本例題 B–3.（再掲）

右図で，AF : FB = $x_1 : x_2$，AP : PD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4) AE : EC を求めよ。

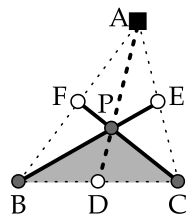


（解法） (4) $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AF}{FB} + \dfrac{AE}{EC}$ より（以下省略）

基本例題 B–4.（再掲）

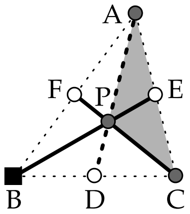
右図で，FP : PC = $x_1 : x_2$，BP : PE = $y_1 : y_2$ であるとき，

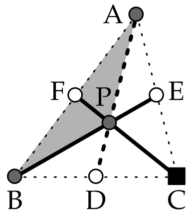
(4) AP : PD を求めよ。



（解法） (4) $\dfrac{PA}{AD} = \dfrac{PE}{EB} + \dfrac{PF}{FC}$ より（以下省略）

（別解） 次の左図のように，$\triangle$PAC を「チェバ三角形」と見立てて $\dfrac{PB}{BE} = \dfrac{PF}{FC} + \dfrac{PD}{DA}$ としてもよいし，あるいは，次の右図のように，$\triangle$PAB を「チェバ三角形」と見立てて $\dfrac{PC}{CF} = \dfrac{PD}{DA} + \dfrac{PE}{EB}$ としてもよい。

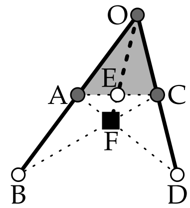




基本例題 C–1. （再掲）

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，OC : CD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4)　OE : EF を求めよ。

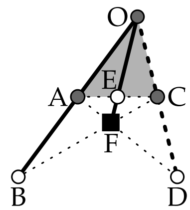


（解法）　(4)　$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{FE}} = \dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BA}} + \dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DC}}$ より（以下省略）

基本例題 C–2. （再掲）

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，OE : EF = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4)　OC : CD を求めよ。

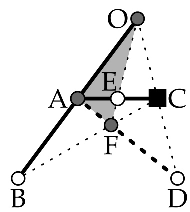


（解法）　(4)　$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{FE}} = \dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BA}} + \dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DC}}$ より（以下省略）

基本例題 C–3. （再掲）

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，AE : EC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4)　AF : FD を求めよ。

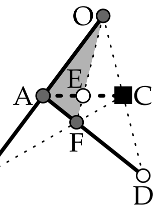


（解法）　(4)　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BO}} + \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}$ より（以下省略）

基本例題 C–4.（再掲）

右図で，OA : AB = $x_1 : x_2$，AF : FD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4) AE : EC を求めよ。

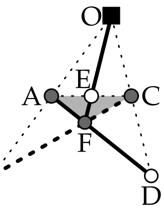


（解法） (4) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BO}} + \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}$ より（以下省略）

基本例題 C–7.（再掲）

右図で，OE : EF = $x_1 : x_2$，AF : FD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4) BF : FC を求めよ。

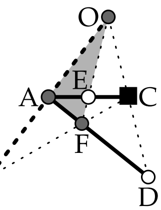


（解法） (4) $\dfrac{\mathrm{FO}}{\mathrm{OE}} = \dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{DA}} + \dfrac{\mathrm{FB}}{\mathrm{BC}}$ より（以下省略）

基本例題 C–8.（再掲）

右図で，AE : EC = $x_1 : x_2$，AF : FD = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4) OA : AB を求めよ。

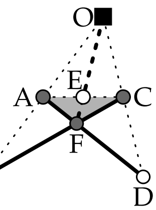


（解法） (4) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BO}} + \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}$ より（以下省略）

基本例題 C–9.（再掲）

右図で，AF : FD = $x_1 : x_2$，BF : FC = $y_1 : y_2$ であるとき，

(4) OE : EF を求めよ。



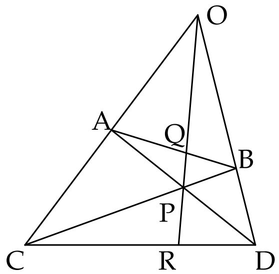
（解法） (4) $\dfrac{\mathrm{FO}}{\mathrm{OE}} = \dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{DA}} + \dfrac{\mathrm{FB}}{\mathrm{BC}}$ より（以下省略）

さて，最後に，**問題 2.**（#25 ページ）の (4) を，「第 3 の定理」を利用して鮮やかに解いてみたい。

問題 2.（再掲）

右図で，$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ であるとき，

(4)　OQ : OR を求めよ。



（解法）

「第 3 の定理」より，

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{OC}{CA} + \frac{OD}{DB} = \frac{2}{1} + \frac{3}{1} = \frac{5}{1},$$

これより OP : PQ = 5 : 1，すなわち OP : OQ = 5 : 4，したがって

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OP}.$$

同様に，「第 3 の定理」より，

$$\frac{OP}{PR} = \frac{OA}{AC} + \frac{OB}{BD} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} = \frac{3}{1},$$

これより OP : PR = 3 : 1，すなわち OP : OR = 3 : 4，したがって

$$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OP}.$$

この 2 式より，

$$OQ : OR = \frac{4}{5} : \frac{4}{3} = \underline{3 : 5}.$$

あとがき

図が多いせいもあるが，「メネラウスの定理」と「チェバの定理」について書くだけでこれほどのボリュームになってしまったことに，自分でも驚いている。もちろん，もっと上手にまとめればもっとコンパクトになったのだろうが，私の力ではこれが限界であろう。

事前に予想していた通り，パソコンで図を描く作業に膨大な時間を奪われた。執筆開始当初の予定ではもう少し多くの話題を取り上げるつもりだったが，時間的な制約により，これらは断念せざるを得なかった。特に，**「メネラウスの図形」と「チェバの図形」の双対性**については是非とも触れたかったので，残念である。

また，「メネラウスの図形」の 基本例題 A–1.〜A–4.，「チェバの図形①」の 基本例題 B–1.〜B–4.，「チェバの図形②」の 基本例題 C–1.〜C–9. については，すべての問題に図と等式を添えた解説をつけるつもりだったのだが，時間もなければ根気も続かず，これも断念した。必要な情報は記しておいたつもりなので，ご容赦願いたい。（しかしその根気のなさが，ページ数を減らすことに多少貢献した。）

なお，私のプライベートな Web サイトにて，「メネラウスの定理とチェバの定理の問題演習プリント」を公開している。ご利用いただければ幸いである。

平面幾何教室　http://www.geocities.jp/osaqmath/

最後に。

以下の用語はあくまで **本稿で勝手に名付けた用語** であり，一般的に通用する用語ではないことを，再度お断りしておく；

・メネラウス三角形　・メネラウス線（※１）　**・メネラウス点**（※１）
・チェバ三角形　・チェバ点（※１）　**・チェバ線**（※１，※２）　**・チェバ線の足**（※２）
・メネラウスの図形　・チェバの図形①　・チェバの図形②　・第 3 の定理

（※１）　「メネラウスの図形」と「チェバの図形」の双対性について本文中で触れることができなかったため，これらの用語を導入した意味がなくなってしまった。（もともとは，「メネラウス線」と「チェバ点」が，「メネラウス点」と「チェバ線」が，それぞれ双対な関係にあることを記す予定だった。）
なお，念のため追記しておくが，「メネラウスの定理」と「チェバの定理」は双対命題ではない。

（※２）　「チェバ線」と「チェバ線の足」については，実はある本でこれらの語が紹介されているのを見たことがあるので，もしかしたら一般的に通用する用語なのかもしれない。しかし，今の私にははっきりしたことはわからない。

参考文献

[1] **「初等幾何のたのしみ」** 清宮俊雄，日本評論社，2001，ISBN4-535-78335-7

[2] **「高校数学史演習」** 安藤洋美，現代数学社，1999，ISBN4-7687-0261-9

[3] **「体系数学 II 幾何編」** 岡部恒治，数研出版，2003，ISBN4-410-21645-7

本稿で「第 3 の定理」と呼んだ定理は，**[1]** で知った。

メネラウスの業績については，主として **[2]** を参考にして記した。しかし，チェバの業績を紹介している文献はほとんど見当たらず，それについては断片的で不明瞭な情報しか集めることができなかった。

[3] は，中高一貫私立校向けの非検定教科書である。これ以外にも手元にある数多くの問題集・参考書に目を通したが，本校で **[3]** を採用しているために，この教科書ばかり批判することになってしまい，大変心苦しく思っている。