

正の数全体の集合の体

参拾萬数学工房
(<http://www.300000.net/>)

はじめに

この発端は、私がある日なんとなく、

「方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ということは、方程式

$$e^{ax^2+bx+c} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の解も $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ なんだなあ…。」

と考えたことであった。

「きっと、方程式①を e^x について解けば、 $e^x = e^{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ という解を、 e^a, e^b, e^c の式で表すことができるだろう。」

そう思ったのだが、しかし、実際に試みたところ、これがなかなかうまくいかない(脚注1)。

* * * *

任意の2数 e^p, e^q に対して、加法 $\underset{[e]}{+}$ と乗法 $\underset{[e]}{\times}$ を次のように定める；

$$\begin{aligned} e^p \underset{[e]}{+} e^q &:= e^{p+q} \\ e^p \underset{[e]}{\times} e^q &:= e^{pq} \end{aligned}$$

2つの演算 $\underset{[e]}{+}, \underset{[e]}{\times}$ をこのように定めると、方程式①は

$$e^a \underset{[e]}{\times} e^x \underset{[e]}{\times} e^x \underset{[e]}{+} e^b \underset{[e]}{\times} e^x \underset{[e]}{+} e^c = 1$$

と書き換えられる。さらに、 $e^a = A, e^b = B, e^c = C, e^x = X$ と置換すれば、

$$A \underset{[e]}{\times} X \underset{[e]}{\times} X \underset{[e]}{+} B \underset{[e]}{\times} X \underset{[e]}{+} C = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

となる。方程式②は、「 \mathbb{R} における2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解法」と同じ手法で、 X について解くことができるはずである。

(脚注1) $a = \log e^a, b = \log e^b, c = \log e^c$ を $e^x = e^{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ に代入すれば、「 e^x を e^a, e^b, e^c の式で表すこと」はできる。しかし、それは「ただ置換しただけ」であり、私が考えたいこととは全然異なるのである。

私は、「方程式 ② を $X = e^x$ について解き、解 $X = e^{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ を $A = e^a$, $B = e^b$, $C = e^c$ の式で表すこと」を 1 つの目標として、2 つの演算 $[e]$, $[e]$ に対するさまざまな考察を行った。本稿は、その考察をまとめたものである。

* * * *

本稿において、K は常に「1 ではない正の定数 (Constant) を表すものとする(脚注 2)。

正の定数 $K(\neq 1)$ に対して新たに定める「加法 $[K]$ 」と「乗法 $[K]$ 」を、通常の加法・乗法と区別するために、本稿ではそれぞれ「加法 $[K]$ 」, 「乗法 $[K]$ 」と書くことにする。

そして、正の数全体の集合 \mathbb{R}^+ に 加法 $[K]$ と 乗法 $[K]$ を入れて体ができるることを示し、この体 $\mathbb{R}^+([+, \times])$ に対して今後出てくる用語・演算・関数などには、すべてどこかに記号 $[K]$ を付けて表すこととする。(逆に、通常の用語・演算子・関数などの表記は、すべて通常の意味を表すものとする。)

また、本稿においては、原則として、正の数全体の体 $\mathbb{R}^+([+, \times])$ の元とみなす正の数をアルファベット大文字 (A, B, C, X, Y など) で表し、実数体 \mathbb{R} の元とみなす実数をアルファベット小文字 (a, b, c, x, y など) で表すこととする(脚注 3)。

(脚注 2) 定数 K は 1 以外の正の数であればよく、無理数でも構わない。なお、この定数 K のみ、他の文字との差別化としてタイプライタ体を用いた。

(脚注 3) 大文字と小文字は、例えば $A = K^a$, $X = K^x$ などのように対応させて用いる。

目次

はじめに	3
§ 1 加法 _[K] と乗法 _[K] の定義	7
§ 1.1 加法 _[K] の定義	
§ 1.2 乗法 _[K] の定義	
§ 1.3 加法 _[K] と乗法 _[K] に関する注意	
§ 2 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$	9
§ 2.1 \mathbb{R}^+ が加法 _[K] と乗法 _[K] によって体をなすこと	
§ 2.2 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の加法単位元 _[K] (零元 _[K])1について	
§ 3 体の同型	12
§ 3.1 写像 ψ_K と、体 \mathbb{R} と体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の同型	
§ 3.2 写像 φ と、体 $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ と体 $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ の同型	
§ 4 減法 _[K] と除法 _[K] の定義	16
§ 4.1 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における四則演算の用語	
§ 4.2 加法逆元 _[K] と減法 _[K] の定義	
§ 4.3 乗法逆元 _[K] (逆数 _[K])と除法 _[K] の定義	
§ 4.4 分数型表記 _[K]	
§ 5 数の大小関係 _[K] と正 _[K] 負 _[K]	20
§ 5.1 数の大小関係 _[K]	
§ 5.2 数の正 _[K] 負 _[K]	
§ 6 個数 _[K] の数え方と数の分類	23
§ 6.1 個数 _[K] の数え方	
§ 6.2 数の分類(自然数 _[K] , 整数 _[K] , 有理数 _[K])	
§ 7 加法 _[K] の法則	26
§ 7.1 同類項の和 _[K] , 同類項の差 _[K]	
§ 7.2 K^n 倍 _[K]	
§ 7.3 K^n 等分 _[K]	
§ 8 乗法 _[K] の法則	32
§ 8.1 K^n 乗 _[K]	

§ 8.2	K^n 乗根 _[K]	
§ 8.3	乗法公式 _[K]	
§ 9	$\mathbb{R}_{[K]}^+$ における方程式の解法	36
§ 9.1	K 次 _[K] 方程式	
§ 9.2	K^2 次 _[K] 方程式	
§ 10	指数 _[K] と 対数 _[K]	38
§ 10.1	指数 _[K] の拡張	
§ 10.2	対数 _[K]	
あとがき		42

§ 1 加法_[K] と 乗法_[K] の定義

§ 1.1 加法_[K] の定義

2 数 $X, Y \in \mathbb{R}^+$ に対して、加法_[K] を次のように定義する。

加法_[K] の定義 (I)

$$X_{[K]} + Y := X \cdot Y$$

この定義から、明らかに、 $X_{[K]} + Y$ の計算結果は K の値に依らない。

$X = K^x, Y = K^y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると、この定義は次のように書き換えられる；

加法_[K] の定義 (II)

$$K^x + K^y := K^{x+y}$$

例 1 $K = 2$ のとき、

• $4_{[2]} + 8 = 4 \cdot 8 = 32$

◊ これを定義 (II) で計算すると、 $4_{[2]} + 8 = 2^2 + 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

• $7_{[2]} + 5 = 7 \cdot 5 = 35$

◊ これを定義 (II) で計算すると、

$$7_{[2]} + 5 = 2^{\log_2 7} + 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 7} \cdot 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 7 + \log_2 5} = 2^{\log_2 (7 \cdot 5)} = 2^{\log_2 35} = 35$$

§ 1.2 乗法_[K] の定義

2 数 $X, Y \in \mathbb{R}^+$ に対して、乗法_[K] を次のように定義する。

乗法_[K] の定義 (I)

$$X \times_{[K]} Y := K^{(\log_K X) \cdot (\log_K Y)}$$

$X = K^x, Y = K^y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると、この定義は次のように書き換えられる；

乗法_[K] の定義 (II)

$$K^x \times_{[K]} K^y := K^{xy}$$

例 2

$K = 2$ のとき、

- $4 \times_{[2]} 8 = 2^{(\log_2 4) \cdot (\log_2 8)} = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$
 - ◊ これを定義 (II) で計算すると、 $4 \times_{[2]} 8 = 2^2 \times_{[2]} 2^3 = 2^{2+3} = 2^6 = 64$
- $7 \times_{[2]} 5 = 2^{(\log_2 7) \cdot (\log_2 5)}$
 - ◊ これを定義 (II) で計算すると、 $7 \times_{[2]} 5 = 2^{\log_2 7} \times_{[2]} 2^{\log_2 5} = 2^{(\log_2 7) \cdot (\log_2 5)}$

§ 1.3 加法_[K] と 乗法_[K] に関する注意

$A \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$ に対して、通常の演算と同じように

$$\overbrace{A + A + \cdots + A}_{n \text{ 個}} = n \times_{[K]} A$$

が成り立つことを期待するが、残念ながら この等式は一般には成り立たない。これについては、§ 6.1 と § 7.2 で詳述する。

§ 2 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$

§ 2.1 \mathbb{R}^+ が 加法_[K] と 乗法_[K] によって体をなすこと

I. \mathbb{R}^+ が 加法_[K] に関してアーベル群をなすこと

[I(i)] (加法_[K] に関して閉じている)

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^+$ に対して

$$X +_{[K]} Y \in \mathbb{R}^+$$

[I(ii)] (加法_[K] の結合法則)

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^+$ に対して

$$(X +_{[K]} Y) +_{[K]} Z = X +_{[K]} (Y +_{[K]} Z)$$

[I(iii)] (加法_[K] に関する単位元 (零元) の存在)

加法_[K] に関する単位元 (零元) は, $1 \in \mathbb{R}^+$ である。

(これを「加法単位元_[K] (零元_[K])」と呼ぶことにする。)

$\forall X \in \mathbb{R}^+$ に対して

$$X +_{[K]} 1 = 1 +_{[K]} X = X$$

[I(iv)] (加法_[K] に関する逆元の存在)

$X \in \mathbb{R}^+$ の, 加法_[K] に関する逆元は, $\frac{1}{X} \in \mathbb{R}^+$ である。

(これを「 X の 加法逆元_[K]」と呼ぶことにする)

$$X +_{[K]} \frac{1}{X} = \frac{1}{X} +_{[K]} X = 1$$

ここで, $X = K^x$ ($x \in \mathbb{R}$) とすると, この 加法逆元_[K] は K^{-x} である。

$$K^x +_{[K]} K^{-x} = K^{-x} +_{[K]} K^x = 1$$

[I(v)] (加法_[K] の交換法則)

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^+$ に対して

$$X +_{[K]} Y = Y +_{[K]} X$$

例 3

- [I(iii)] について。例えば $X = 8$ に対して $8 +_{[K]} 1 = 8 \cdot 1 = 8$ となる。
- [I(iv)] について。例えば 8 の 加法逆元_[K] は $\frac{1}{8}$ であり, $8 +_{[K]} \frac{1}{8} = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$ となる。

\mathbb{R}^+ から 加法単位元 $_{[K]}$ (零元 $_{[K]}$)1 を除いた集合を $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ と表す。

II. $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ が 乗法 $_{[K]}$ に関してアーベル群をなすこと

[II(i)] (乗法 $_{[K]}$ に関して閉じている)

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ に対して

$$X \times_{[K]} Y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

[II(ii)] (乗法 $_{[K]}$ の結合法則)

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ に対して

$$(X \times_{[K]} Y) \times_{[K]} Z = X \times_{[K]} (Y \times_{[K]} Z)$$

[II(iii)] (乗法 $_{[K]}$ に関する単位元の存在)

乗法 $_{[K]}$ に関する単位元は、 $K \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ である。

(これを「乗法単位元 $_{[K]}$ 」と呼ぶことにする)

$\forall X \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ に対して

$$X \times_{[K]} K = K \times_{[K]} X = X$$

[II(iv)] (乗法 $_{[K]}$ に関する逆元の存在)

$X \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ の、 乗法 $_{[K]}$ に関する逆元 (逆数) は、 $K^{\frac{1}{\log_K X}} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ である。

(これを「 X の 乗法逆元 $_{[K]}$ (逆数 $_{[K]}$)」と呼ぶことにする)

$$X \times_{[K]} K^{\frac{1}{\log_K X}} = K^{\frac{1}{\log_K X}} \times_{[K]} X = K$$

ここで、 $X = K^x$ ($x \in \mathbb{R}$, ただし $x \neq 0$) とすると、 これの 乗法逆元 $_{[K]}$ (逆数 $_{[K]}$) は $K^{\frac{1}{x}}$ である。

$$K^x \times_{[K]} K^{\frac{1}{x}} = K^{\frac{1}{x}} \times_{[K]} K^x = K$$

[II(v)] (乗法 $_{[K]}$ の交換法則)

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ に対して

$$X \times_{[K]} Y = Y \times_{[K]} X$$

例 4

- [II(iii)] について。

例えば $K = 2$ のとき、 $X = 8 [= 2^3]$ に対して $8 \times_{[2]} 2 = 2^3 \times_{[2]} 2^1 = 2^{3+1} = 8$ となる。

- [II(iv)] について。

例えば $K = 2$ のとき、 $8 [= 2^3]$ の 乗法逆元 $_{[2]}$ (逆数 $_{[2]}$) は $2^{\frac{1}{\log_2 8}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ であり、 $8 \times_{[2]} 2^{1/\log_2 8} = 2^3 \times_{[2]} 2^{\frac{1}{3}} = 2^{3+\frac{1}{3}} = 2$ となる。

III. 加法_[K]と乗法_[K]に関して分配法則が成り立つこと

[III] (分配法則)

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^+$ に対して

$$\begin{aligned} X \times_{[K]} (Y + Z) &= (X \times_{[K]} Y) + (X \times_{[K]} Z) \\ (X + Y) \times_{[K]} Z &= (X \times_{[K]} Z) + (Y \times_{[K]} Z) \end{aligned}$$

[III] の証明

$X = K^x, Y = K^y, Z = K^z \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$ とすると,

- $K^x \times_{[K]} (K^y + K^z) = K^{x(y+z)} = K^{xy+xz} = K^{xy} \cdot K^{xz} = (K^x \times_{[K]} K^y) + (K^x \times_{[K]} K^z)$
- $(K^x + K^y) \times_{[K]} K^z = K^{(x+y)z} = K^{xz+yz} = K^{xz} \cdot K^{yz} = (K^x \times_{[K]} K^z) + (K^y \times_{[K]} K^z)$

(証明終)

以上 [I]~[III] より, 正の数全体の集合 \mathbb{R}^+ は, 加法_[K]と乗法_[K]に関して体(Field)をなす。

$\mathbb{R}_{[K]}^+$ の定義

\mathbb{R}^+ にこの 2 つの演算 $\times_{[K]}$ と $\times_{[K]}$ を入れた体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ を, 今後は簡略化して

$\mathbb{R}_{[K]}^+$

と表すこととする。

§ 2.2 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の加法単位元_[K] (零元_[K]) 1について

体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の加法単位元_[K] (零元_[K]) 1について, 次のことが言える。

体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の加法単位元_[K] (零元_[K]) 1 の定義と性質

- (i) $\forall A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ に対して, $A +_1 = 1 +_1 A = A$ (定義)
- (ii) $\forall A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ に対して, $A \times_1 1 = 1 \times_1 A = A$
- (iii) 1 の乗法逆元_[K] (逆数_[K]) は存在しない。

§ 3 体の同型

§ 3.1 対応 ψ_K と、体 \mathbb{R} と体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の同型

体 \mathbb{R} から体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ への対応 ψ_K を次のように定めると、これは同型対応である；

体 \mathbb{R} から体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ への同型対応 ψ_K

体 \mathbb{R} から体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ への全単射対応

$$\psi_K : x \mapsto K^x$$

は、 $\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\psi_K(a + b) = \psi_K(a) + \psi_K(b)$$

$$\psi_K(a \times b) = \psi_K(a) \times \psi_K(b)$$

の形で演算を保つ同型対応である。

($a, b \in \mathbb{R}$, $\psi_K(a), \psi_K(b) \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ であることに注意。)

$\mathbb{R}_{[K]}^+$ における「加法単位元 $K_{[K]}$ 」、「乗法単位元 $K_{[K]}$ 」は、それぞれ \mathbb{R} における「加法単位元 0」、「乗法単位元 1」を対応 ψ_K によって移したものである^(脚注 4)。

- $\psi_K(0) = K^0 = 1$ …… これは $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の加法単位元 $K_{[K]}$ である。
- $\psi_K(1) = K^1 = K$ …… これは $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の乗法単位元 $K_{[K]}$ である。

また、 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における「数 X の加法逆元 $K_{[K]}$ 」、「数 X の乗法逆元 $K_{[K]}$ 」は、それぞれ \mathbb{R} における「数 x の加法逆元 $-x$ 」、「数 x の乗法逆元 $\frac{1}{x}$ 」を対応 ψ_K によって移したものである^(脚注 5)。

- $\psi_K(-x) = K^{-x}$ …… これは $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における数 $\psi_K(x) [= K^x]$ の加法逆元 $K_{[K]}$ である。
- $\psi_K\left(\frac{1}{x}\right) = K^{\frac{1}{x}}$ …… これは $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における数 $\psi_K(x) [= K^x]$ の乗法逆元 $K_{[K]}$ である。

(脚注 4) § 2.1 の I(iii), II(iii) を参照。

(脚注 5) § 2.1 の I(iv), II(iv) を参照。

§ 3.2 写像 φ と、体 $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ と体 $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ の同型

異なる 2 つの正の定数 $K_1(\neq 1)$, $K_2(\neq 1)$ に対して、体 $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ と体 $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ は同じ要素を持つ集合である(脚注⁶)が、演算構造の異なる体になる。

例 5 $K_1 = 2$, $K_2 = 4$ のとき,

- 和_[K]に関して,
 - ◊ $\mathbb{R}_{[2]}^+$ における「64 と 16 の和_[2]」は $64 +_{[2]} 16 = 2^6 +_{[2]} 2^4 = 2^{6+4} = 2^{10}$
 - ◊ $\mathbb{R}_{[4]}^+$ における「64 と 16 の和_[4]」は $64 +_{[4]} 16 = 4^3 +_{[2]} 4^2 = 4^{3+2} = 4^5 [= 2^{10}]$ となり、 $64 +_{[2]} 16$ と $64 +_{[4]} 16$ は同じ値が得られる(脚注⁷)。
- 積_[K]に関して,
 - ◊ $\mathbb{R}_{[2]}^+$ における「64 と 16 の積_[2]」は $64 \times_{[2]} 16 = 2^6 \times_{[2]} 2^4 = 2^{6 \cdot 4} = 2^{24}$
 - ◊ $\mathbb{R}_{[4]}^+$ における「64 と 16 の積_[4]」は $64 \times_{[4]} 16 = 4^3 \times_{[2]} 4^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6 [= 2^{12}]$ となり、 $64 \times_{[2]} 16$ と $64 \times_{[4]} 16$ では異なる値となる。

このように、体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における 2 数 A, B の和_[K] $A +_{[K]} B$ は、定数 K に依らず同じ値となるが、体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における 2 数 A, B の積_[K] $A \times_{[K]} B$ は、定数 K に依って異なる値となる。

しかし、体 $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ から体 $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ への写像 φ を次のように定めると、2つの体の間で演算を保つことができる(脚注⁸)；

体 $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ から体 $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ への同型写像 φ (I)

体 $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ から体 $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ への全単射写像

$$\varphi : X \mapsto X^{\log_{K_1} K_2}$$

は、 $\forall A, B \in \mathbb{R}_{[K_1]}^+$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(A +_{[K_1]} B) &= \varphi(A) +_{[K_2]} \varphi(B) \\ \varphi(A \times_{[K_1]} B) &= \varphi(A) \times_{[K_2]} \varphi(B)\end{aligned}$$

の形で演算を保つ同型写像である。

$(A, B \in \mathbb{R}_{[K_1]}^+, \varphi(A), \varphi(B) \in \mathbb{R}_{[K_2]}^+ \text{ であることに注意。})$

(脚注⁶) 体 $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ と体 $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ は、いずれも正の数全体の集合 $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ である。

(脚注⁷) もちろん、加法_[K]の定義から、 K の値によらず $64 +_{[K]} 16 = 64 \cdot 16$ なのだから、和_[K]が一致するのは当然である。

(脚注⁸) φ は、§ 3.1 で定めた写像 $\psi_K : x \mapsto K^x$ を用いると $\varphi = \psi_{K_2} \circ \psi_{K_1}^{-1}$ と表すことができる。

そもそも、同型写像 ψ_{K_1} から $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{[K_1]}^+$ が、同型写像 ψ_{K_2} から $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{[K_2]}^+$ が、それぞれ導出されるのであるから、写像 $\psi_{K_2} \circ \psi_{K_1}^{-1}$ によって $\mathbb{R}_{[K_1]}^+ \cong \mathbb{R}_{[K_2]}^+$ であることは自明である。

ここで, $X = K_1^x$ ($x \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\begin{aligned}\varphi(K_1^x) &= (K_1^x)^{\log_{K_1} K_2} \\ &= K_1^{x \cdot \log_{K_1} K_2} \\ &= K_1^{\log_{K_1} K_2^x} = K_2^x\end{aligned}$$

となるので, 同型写像 φ は次のように書いた方が理解しやすい;

$\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ から $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ への同型写像 φ (II)

$\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ から $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ への全単射写像

$$\varphi : K_1^x \mapsto K_2^x$$

は, $\forall K_1^a, K_1^b \in \mathbb{R}_{[K_1]}^+$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対して

$$\begin{aligned}\varphi(K_1^a +_{[K_1]} K_1^b) &= \varphi(K_1^a) +_{[K_2]} \varphi(K_1^b) \\ \varphi(K_1^a \times_{[K_1]} K_1^b) &= \varphi(K_1^a) \times_{[K_2]} \varphi(K_1^b)\end{aligned}$$

の形で演算を保つ同型写像である。

($K_1^a, K_1^b \in \mathbb{R}_{[K_1]}^+$, $\varphi(K_1^a), \varphi(K_1^b) \in \mathbb{R}_{[K_2]}^+$ であることに注意。)

例 6 $K_1 = 2, K_2 = 4$ のとき, $\mathbb{R}_{[2]}^+$ から $\mathbb{R}_{[4]}^+$ への全単射写像として

$$\varphi : 2^x \mapsto 4^x$$

をとる。2 数 $64, 16 \in \mathbb{R}_{[2]}^+$ 対して, $64 = 2^6, 16 = 2^4$ であることから,

$$\varphi(64) = \varphi(2^6) = 4^6, \quad \varphi(16) = \varphi(2^4) = 4^4$$

となる。したがって, 次のことが言える;

- $\varphi(A +_{[K_1]} B) = \varphi(A) +_{[K_2]} \varphi(B)$ について。
 $\diamond \varphi(64 +_{[2]} 16) = \varphi(2^6 +_{[2]} 2^4) = \varphi(2^{6+4}) = \varphi(2^{10}) = 4^{10}$
 $\diamond \varphi(64) +_{[4]} \varphi(16) = \varphi(2^6) +_{[4]} \varphi(2^4) = 4^6 +_{[4]} 4^4 = 4^{6+4} = 4^{10}$
 であるから, 確かに $\varphi(64 +_{[2]} 16) = \varphi(64) +_{[4]} \varphi(16)$ となっている。

- $\varphi(A \times_{[K_1]} B) = \varphi(A) \times_{[K_2]} \varphi(B)$ について。
 $\diamond \varphi(64 \times_{[2]} 16) = \varphi(2^6 \times_{[2]} 2^4) = \varphi(2^{6 \cdot 4}) = \varphi(2^{24}) = 4^{24}$
 $\diamond \varphi(64) \times_{[4]} \varphi(16) = \varphi(2^6) \times_{[4]} \varphi(2^4) = 4^6 \times_{[4]} 4^4 = 4^{6 \cdot 4} = 4^{24}$
 であるから, 確かに $\varphi(64 \times_{[2]} 16) = \varphi(64) \times_{[4]} \varphi(16)$ となっている。

写像 φ は同型写像なので、逆写像 φ^{-1} が存在する^(脚注 9)；

同型写像 φ の逆写像 φ^{-1}

$\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ から $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ への同型写像

$$\varphi : X \mapsto X^{\log_{K_1} K_2} \quad [\iff \varphi : K_1^x \mapsto K_2^x]$$

に対して、 φ の逆写像 φ^{-1} は $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ から $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ への同型写像で、

$$\varphi^{-1} : X \mapsto X^{\log_{K_2} K_1} \quad [\iff \varphi^{-1} : K_2^x \mapsto K_1^x]$$

また、言うまでもないことではあるが、 $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ の乗法単位元 K_1 と $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ の乗法単位元 K_2 について、次のことが言える；

同型写像 φ と 乗法単位元 $[K]$

- $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ の乗法単位元 $[K_1]$ である K_1 は、 φ によって $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ の乗法単位元 $[K_2]$ である K_2 に移る。すなわち

$$\varphi(K_1) = K_2$$

- $\mathbb{R}_{[K_2]}^+$ の乗法単位元 $[K_2]$ である K_2 は、 φ^{-1} によって $\mathbb{R}_{[K_1]}^+$ の乗法単位元 $[K_1]$ である K_1 に移る。すなわち

$$\varphi^{-1}(K_2) = K_1$$

(脚注 9) φ^{-1} は、§ 3.1 で述べた写像 $\psi_K : x \mapsto K^x$ を用いれば $\varphi^{-1} = (\psi_{K_2} \circ \psi_{K_1}^{-1})^{-1} = \psi_{K_1} \circ \psi_{K_2}^{-1}$ である。

§ 4 減法_[K] と 除法_[K] の定義

§ 4.1 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における四則演算の用語

ここで、体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における四則演算の用語を一括してまとめておくことにする。

体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における四則演算の用語

- 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における加法 $+$ を「加法_[K]」と書き、その計算結果を「和_[K]」と書く。
- 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における減法 $-$ を「減法_[K]」と書き、その計算結果を「差_[K]」と書く。
- 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における乗法 \times を「乗法_[K]」と書き、その計算結果を「積_[K]」と書く。
- 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における除法 \div を「除法_[K]」と書き、その計算結果を「商_[K]」と書く。

§ 4.2 加法逆元_[K] と 減法_[K] の定義

$\forall X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ に対して、 $\frac{1}{X} \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ であり、かつ

$$X + \frac{1}{X} = X \cdot \frac{1}{X} = 1$$

である。 1 は $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の 加法単位元_[K] であるから、 $\frac{1}{X}$ は X の 加法逆元_[K] である。

「 $x \in \mathbb{R}$ の加法逆元」を「 $-x$ 」と表記することに倣い、「 $X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ の 加法逆元_[K]」を、次のように定める；

加法逆元_[K] の定義 (I)

$X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ の 加法逆元_[K] を、 ${}_{[K]}^{-X}$ と書くこととする。すなわち

$${}_{[K]}^{-X} := \frac{1}{X}$$

$X = K^x$ ($x \in \mathbb{R}$) とすると、これは次のように書き換えられる；

加法逆元_[K] の定義 (II)

$${}_{[K]}^{-K^x} = K^{-x}$$

例 7 $K = 2$ のとき,

- 32 の 加法逆元 $_{[2]}$ は, $_{[2]}^{-}32 = \frac{1}{32}$

◊ これを定義 (II) で計算すると,

$$_{[K]}^{-}32 = _{[K]}^{-}2^5 = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

- 13 の 加法逆元 $_{[2]}$ は, $_{[2]}^{-}13 = \frac{1}{13}$

◊ これを定義 (II) で計算すると,

$$_{[K]}^{-}13 = _{[K]}^{-}2^{\log_2 13} = 2^{-\log_2 13} = \frac{1}{2^{\log_2 13}} = \frac{1}{13}$$

次に, 減法 $_{[K]}$ (減法 $_{[K]}$) を, 加法逆元 $_{[K]}$ を用いて次のように定める;

減法 $_{[K]}$ の定義 (I)

2 数 $X, Y \in \mathbb{R}_{[K]}^{+}$ に対して, X と Y の 差 $_{[K]} X - Y$ を, 「 X と, Y の 加法逆元 $_{[K]}^{-}Y$ との 和 $_{[K]}$ 」として定義する;

$$X - Y := X + _{[K]}(-Y) = X + _{[K]} \frac{1}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y} = \frac{X}{Y}$$

$X = K^x, Y = K^y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると, これらは次のように書き換えられる;

減法 $_{[K]}$ の定義 (II)

$$K^x - K^y = K^{x-y}$$

例 8 $K = 2$ のとき,

- $32 - 4 = \frac{32}{4} = 8$

◊ これを定義 (II) で計算すると,

$$32 - 4 = 2^5 - 2^2 = 2^{5-2} = 2^3 = 8$$

- $7 - 5 = \frac{7}{5}$

◊ これを定義 (II) で計算すると,

$$7 - 5 = 2^{\log_2 7} - 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 7 - \log_2 5} = 2^{\log_2 \frac{7}{5}} = \frac{7}{5}$$

§ 4.3 乗法逆元_[K] (逆数_[K])と除法_[K]の定義

1でない数 $X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ (脚注 10) に対して, $K^{\frac{1}{\log_K X}} \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ であり, かつ

$$X \times K^{\frac{1}{\log_K X}} = K^{\log_K X} \times K^{\frac{1}{\log_K X}} = K^{\log_K X \cdot \frac{1}{\log_K X}} = K$$

である。K は $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の乗法単位元_[K] であるから, $K^{\frac{1}{\log_K X}}$ は X の乗法逆元_[K] (逆数_[K]) である。

「 $x \in \mathbb{R}$ の乗法逆元 (逆数)」を $\frac{1}{x}$ と表記することに倣い, 「 $X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ の乗法逆元_[K] (逆数_[K])」を, 次のように定める(脚注 11) ;

乗法逆元_[K] (逆数_[K])の定義 (I)

1でない数 $X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ の乗法逆元_[K] (逆数_[K])を, $K_{[K]} \diagup X$ と書くこととする。すなわち

$$K_{[K]} \diagup X := K^{\frac{1}{\log_K X}} \quad (\text{ただし } X \neq 1)$$

$X = K^x$ ($x \in \mathbb{R}$, ただし $x \neq 0$) とすると, この定義は次のように書き換えられる;

乗法逆元_[K] (逆数_[K])の定義 (II)

$$K_{[K]} \diagup K^x = K^{\frac{1}{x}} \quad (\text{ただし } x \neq 0)$$

例 9 $K = 2$ のとき,

- $32 [= 2^5]$ の乗法逆元_[2] (逆数_[2]) は, $2_{[2]} \diagup 32 = 2^{\frac{1}{\log_2 32}} = 2^{\frac{1}{5}}$
 - ◊ これを定義 (II) で計算すると, $2_{[2]} \diagup 32 = 2_{[2]} \diagup 2^5 = 2^{\frac{1}{5}}$
- $13 [= 2^{\log_2 13}]$ の乗法逆元_[2] (逆数_[2]) は, $2_{[2]} \diagup 13 = 2^{\frac{1}{\log_2 13}}$
 - ◊ これを定義 (II) で計算すると, $2_{[2]} \diagup 13 = 2_{[2]} \diagup 2^{\log_2 13} = 2^{\frac{1}{\log_2 13}}$

(脚注 10) § 2.2 で述べた通り, 加法単位元_[K] (零元_[K]) である 1 には 乗法逆元_[K] (逆数_[K]) は存在しないため, ここでは $X = 1$ を除外する。

(脚注 11) ここで定義した, 「 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における X の乗法逆元_[K]」の表記は, このあと § 4.4 で定義する「(商の) 分数型表記」に準じている。「 $\frac{1}{x}$ 」の分子の「1」は \mathbb{R} における乗法単位元であり, $\mathbb{R}_{[K]}^+$ においてこれに対応する数は K であるため, X の乗法逆元_[K] (逆数_[K]) は $(1_{[K]} \diagup X$ ではなく) $K_{[K]} \diagup X$ となる。

次に、除法 $\frac{\cdot}{[K]}$ (除法 $_{[K]}$) を、乗法逆元 $_{[K]}$ (逆数 $_{[K]}$)を用いて次のように定める；

除法 $_{[K]}$ の定義 (I)

2 数 $X, Y \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ (ただし $Y \neq 1$ とする) に対して、 X と Y の 商 $_{[K]} X \frac{\cdot}{[K]} Y$ を、
「 X と、 Y の 乗法逆元 $_{[K]} K \frac{\cdot}{[K]} Y$ との 積 $_{[K]}$ 」として定義する；

$$X \frac{\cdot}{[K]} Y := X \times_{[K]} K \frac{\cdot}{[K]} Y = K^{\log_K X} \times_{[K]} K^{\frac{1}{\log_K Y}} = K^{\log_K X \cdot \frac{1}{\log_K Y}} = K^{\frac{\log_K X}{\log_K Y}} \quad (\text{ただし } Y \neq 1)$$

$X = K^x, Y = K^y$ ($x, y \in \mathbb{R}$, ただし $y \neq 0$) とすると、この定義は次のように書き換えられる；

除法 $_{[K]}$ の定義 (II)

$$K^x \frac{\cdot}{[K]} K^y = K^{\frac{x}{y}} \quad (\text{ただし } y \neq 0)$$

例 10 $K = 2$ のとき、

- $32 \frac{\cdot}{[2]} 4 = 32 \times_{[2]} 2 \frac{\cdot}{[2]} 4 = 2^{\frac{\log_4 32}{\log_4 4}} = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$
 ◇ これを定義 (II) で計算すると、 $32 \frac{\cdot}{[2]} 4 = 2^5 \frac{\cdot}{[2]} 2^2 = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$

- $7 \frac{\cdot}{[2]} 5 = 7 \times_{[2]} 2 \frac{\cdot}{[2]} 5 = 2^{\frac{\log_2 7}{\log_2 5}}$
 ◇ これを定義 (II) で計算すると、 $7 \frac{\cdot}{[2]} 5 = 2^{\log_2 7} \frac{\cdot}{[2]} 2^{\log_2 5} = 2^{\frac{\log_2 7}{\log_2 5}}$

§ 4.4 分数型表記 $_{[K]}$

商 $_{[K]} X \frac{\cdot}{[K]} Y$ を $X \frac{\cdot}{[K]} Y$ と書き、これを「(商 $_{[K]}$ の) 分数型表記 $_{[K]}$ 」と呼ぶことにする。

(商 $_{[K]}$ の) 分数型表記 $_{[K]}$

$$X \frac{\cdot}{[K]} Y = X \frac{\cdot}{[K]} Y \quad (\text{ただし } Y \neq 1)$$

前ページの (脚注 11) で述べた通り、 X の 乗法逆元 $_{[K]}$ (逆数 $_{[K]}$) の表記 $K \frac{\cdot}{[K]} X$ は、この
「分数型表記 $_{[K]}$ 」に準じている。

§ 5 数の大小関係_[K]と正_[K]負_[K]

この節では、§ 3.1 で定めた写像 $\psi_K : x \mapsto K^x$ によって、 \mathbb{R} における「大小関係」と「正負」を $\mathbb{R}_{[K]}^+$ に遺伝させる。

§ 5.1 数の大小関係_[K]

$K^a, K^b \in \mathbb{R}_{[K]}^+ (a, b \in \mathbb{R})$ とするとき、大小関係_[K]を、次のように定義する；

大小関係_[K]の定義

2 数 $K^a, K^b \in \mathbb{R}_{[K]}^+ (a, b \in \mathbb{R})$ に対して、 K^a と K^b の大小関係_[K]を、次のように定義する；

$$K^a <_{[K]} K^b \iff a < b$$

- $K^a <_{[K]} K^b (\iff K^b >_{[K]} K^a)$ のとき、
「 K^a は K^b より 小さい_[K]」または「 K^b は K^a より 大きい_[K]」などという。
- $K^a \leq_{[K]} K^b (\iff K^b \geq_{[K]} K^a)$ のとき、
「 K^a は K^b 以下_[K]」または「 K^b は K^a 以上_[K]」などという。

$K^a = A, K^b = B$ とすると、 $K > 1$ の場合は「 A と B の大小関係_[K]」と「 A と B の（通常の）大小関係」が一致するが、 $0 < K < 1$ の場合は逆になるので、注意が必要である。

大小関係の必要十分条件

- $K > 1$ のとき、

$$A <_{[K]} B \iff A < B$$

- $0 < K < 1$ のとき、

$$A <_{[K]} B \iff A > B$$

例 11

- $K = 2$ のとき、 $1 <_2 2 <_2 4 <_2 8 <_2 16 <_2 32$ である。
- $K = \frac{1}{5}$ のとき、 $1 <_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} <_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} <_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125} <_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625} <_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3125}$ である。

例 12

1, 2, 3, 4, 5, 6 の大小関係は、

- $K > 1$ のとき、 $1 <_K 2 <_K 3 <_K 4 <_K 5 <_K 6$ である。
- $0 < K < 1$ のとき、 $1 >_K 2 >_K 3 >_K 4 >_K 5 >_K 6$ である。

§ 5.2 数の正_[K]負_[K]

$A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ とする。

実数体 \mathbb{R} においては、加法単位元（零元）0を基準として、 $a > 0$ なる数 $a \in \mathbb{R}$ を「正の数」、 $a < 0$ なる数 $a \in \mathbb{R}$ を「負の数」と呼ぶ。これに倣い、 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ においては、加法単位元_[K]（零元_[K]）1を基準として、数 $A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ の正_[K]負_[K]を次のように定める；

正_[K]の数・負_[K]の数の定義 (I)

- $A_{[K]} > 1$ であるとき、「 A は 正_[K]の数である」という。
- $A_{[K]} < 1$ であるとき、「 A は 負_[K]の数である」という。

ここで、 $1 = K^0$ であるから、 $A = K^a$ ($a \in \mathbb{R}$) とすると、大小関係_[K]の定義より、次のことが成り立つ。

- $K^a_{[K]} > 1 \iff a > 0$
- $K^a_{[K]} < 1 \iff a < 0$

よって、定義 (I) は、次のように書き換えることができる。

正_[K]の数・負_[K]の数の定義 (II)

- $a > 0$ であるとき、「 K^a は 正_[K]の数である」という。
- $a < 0$ であるとき、「 K^a は 負_[K]の数である」という。

定義 (II) より、 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における積_[K]の正_[K]負_[K]について、次のことが直ちにわかる；

積_[K]の正_[K]負_[K]

$$\begin{aligned} (\text{正}_{[K]})_{[K]} \times (\text{正}_{[K]})_{[K]} &= (\text{正}_{[K]}) \\ (\text{正}_{[K]})_{[K]} \times (\text{負}_{[K]})_{[K]} &= (\text{負}_{[K]}) \\ (\text{負}_{[K]})_{[K]} \times (\text{正}_{[K]})_{[K]} &= (\text{負}_{[K]}) \\ (\text{負}_{[K]})_{[K]} \times (\text{負}_{[K]})_{[K]} &= (\text{正}_{[K]}) \end{aligned}$$

ある数 $A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ の 正_[K]負_[K] は、 $K > 1$ の場合 と $0 < K < 1$ の場合 とで次のように入れ替わるので、注意が必要である。

正_[K] の数・負_[K] の数の必要十分条件

- $K > 1$ のとき、
 - ◊ $A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ が「正_[K] の数」である $\iff A > 1$
 - ◊ $A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ が「負_[K] の数」である $\iff 0 < A < 1$
- $0 < K < 1$ のとき、
 - ◊ $A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ が「正_[K] の数」である $\iff 0 < A < 1$
 - ◊ $A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ が「負_[K] の数」である $\iff A > 1$

例 13

- $K = 2$ のとき、
 - ◊ $2, 8, 16\sqrt{2}, 19$ などは、正_[2] の数である。
 ($\because 2 = 2^1, 8 = 2^3, 16\sqrt{2} = 2^{\frac{9}{2}}, 19 = 2^{\log_2 19}$)
 - ◊ $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16\sqrt{2}}, \frac{1}{19}$ などは、負_[2] の数である。
 ($\because \frac{1}{2} = 2^{-1}, \frac{1}{8} = 2^{-3}, \frac{1}{16\sqrt{2}} = 2^{-\frac{9}{2}}, \frac{1}{19} = 2^{-\log_2 19}$)
- $K = \frac{1}{2}$ のとき、
 - ◊ $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16\sqrt{2}}, \frac{1}{19}$ などは、正_[$\frac{1}{2}$] の数である。
 ($\because \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1, \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \frac{1}{16\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{2}}, \frac{1}{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 19}$)
 - ◊ $2, 8, 16\sqrt{2}, 19$ などは、負_[$\frac{1}{2}$] の数である。
 ($\because 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, 16\sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{9}{2}}, 19 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 19}$)

§ 6 個数_[K] の数え方と数の分類

そもそも加法とは、「個数の合計」を出すときに利用したいものである。しかし、2個と3個を合わせた個数の合計は、 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の加法_[K] $2 + 3$ では求められない。

また、後ほど § 10 にて「指数_[K]」と「対数_[K]」を定義するが、実数体 \mathbb{R} における指数法則（例えば $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ）や対数の性質（例えば $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ ）を $\mathbb{R}_{[K]}^+$ に拡張する際にも、「個数の合計」を 加法_[K] によって出せないと都合が悪い。

そのためには、 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における「個数」について、 \mathbb{R} とは異なる数え方を採用するしか方法がない。

§ 6.1 個数_[K] の数え方

以後、「 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における個数」を、「個数_[K]」と略記する。

個数_[K] の数え方の定義

「個数_[K]」は、単位を「個_[K]」として、順に次のように数える；

$$K \text{ 個}_{[K]}, \quad K^2 \text{ 個}_{[K]}, \quad K^3 \text{ 個}_{[K]}, \quad K^4 \text{ 個}_{[K]}, \quad K^5 \text{ 個}_{[K]}, \quad \dots$$

§ 1.3 で注意した通り、「 $A_{[K]} + A_{[K]} + A_{[K]} = 3 \times A_{[K]}$ 」は一般には成り立たない（脚注 12）。しかし、個数_[K] をこのように定義すると、 $A_{[K]} + A_{[K]} + A_{[K]}$ は次の **例 14** のように計算することができる。（これについては、§ 7.2 にて改めて述べる。）

例 14 $A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ とする。 $A_{[K]} + A_{[K]} + A_{[K]}$ について、次の等式が成り立つ。

- $K = 2$ のとき、 $A_{[2]} + A_{[2]} + A_{[2]}$ は、「 $2^3 [= 8]$ 個_[2] の A を加えたもの」であり，
$$A_{[2]} + A_{[2]} + A_{[2]} = 2^3 \times A_{[2]} [= 8 \times A_{[2]}]$$
- $K = 5$ のとき、 $A_{[5]} + A_{[5]} + A_{[5]}$ は、「 $5^3 [= 125]$ 個_[5] の A を加えたもの」であり，
$$A_{[5]} + A_{[5]} + A_{[5]} = 5^3 \times A_{[5]} [= 125 \times A_{[5]}]$$
- $K = \pi$ のとき、 $A_{[\pi]} + A_{[\pi]} + A_{[\pi]}$ は、「 π^3 個_[\pi] の A を加えたもの」であり，
$$A_{[\pi]} + A_{[\pi]} + A_{[\pi]} = \pi^3 \times A_{[\pi]}$$

例 14 の 3 つの計算は、結果が異なってしまったように見えるが、しかし実際には、いずれも 加法_[K] の定義通りに計算して出てくる値に等しい（脚注 13）。§ 7.2 **例 20** 参照。

(脚注 12) 余談だが、この等式が成り立つのは、 $A = 1$ のとき（つまり A が 加法単位元_[K]（零元_[K]）のとき）と、または $K = \sqrt[3]{3}$ のときのみである。

(脚注 13) 加法_[K] の定義通りに計算すると、 $A_{[K]} + A_{[K]} + A_{[K]} = A \cdot A \cdot A = A^3$ となる。

§ 6.2 数の分類（自然数_[K], 整数_[K], 有理数_[K]）

ここでは, § 3.1 で定めた写像 $\psi_K : x \mapsto K^x$ によって, \mathbb{R} における「自然数」, 「整数」, 「有理数」, 「無理数」を $\mathbb{R}_{[K]}^+$ に遺伝させる。

自然数_[K], 整数_[K], 有理数_[K], 無理数_[K] の定義

$A = K^a$ ($a \in \mathbb{R}$) とする。

- $a \in \mathbb{N}$ であるとき (つまり a が通常の自然数であるとき), A は「自然数_[K]」であるという。
 - ◊ 個数_[K] を数える際に用いる数 $K, K^2, K^3, K^4, K^5, \dots$ が, 「自然数_[K]」である。
- $a \in \mathbb{Z}$ であるとき (つまり a が通常の整数であるとき), A は「整数_[K]」であるという。
 - ◊ $a \in \mathbb{Z}$ が正の整数のとき, K^a は「正_[K] の 整数_[K]」である。
なお, 「正_[K] の 整数_[K]」は「自然数_[K]」と同義である。
 - ◊ $a \in \mathbb{Z}$ が負の整数のとき, K^a は「負_[K] の 整数_[K]」である。
 - ◊ $a = 0$ のときは $K^0 = 1$ (すなわち, 加法単位元_[K]) であり, これも 整数_[K] である。
- $a \in \mathbb{Q}$ であるとき (つまり a を通常の有理数であるとき), A は「有理数_[K]」であるという。
- $a \in \mathbb{R}$ が無理数のとき, A は「無理数_[K]」であるという。

ところで, $-K^a = K^{-a}$ であるから, 「負_[K] の 整数_[K]」は, 次のように定義することもできる。

負_[K] の 整数_[K] の定義 (II)

A が「自然数_[K] (正_[K] の 整数_[K])」であるとき, A の 加法逆元_[K] $-A$ を「負_[K] の 整数_[K]」という。

また, $K^m = M, K^n = N$ (ただし $m, n \in \mathbb{Z}$) とおくと, 除法の定義 (§ 4.3) より

$$M \div_{[K]} N = K^m \div_{[K]} K^n = K^{\frac{m}{n}}$$

であることから, 「有理数」は, 次のように定義することもできる。

有理数_[K] の定義 (II)

M, N が 整数_[K] であるとき, $M \div_{[K]} N$ を「有理数_[K]」という。

自然数_[K]の集合 $\mathbb{N}_{[K]}^+$, 整数_[K]の集合 $\mathbb{Z}_{[K]}^+$, 有理数_[K]の集合 $\mathbb{Q}_{[K]}^+$

$\mathbb{R}_{[K]}^+$ における自然数_[K]の集合, 整数_[K]の集合, 有理数_[K]の集合を, それぞれ次のように表記する;

$$\mathbb{N}_{[K]}^+, \quad \mathbb{Z}_{[K]}^+, \quad \mathbb{Q}_{[K]}^+$$

- $\mathbb{Z}_{[K]}^+$ は, 写像 $\psi_K : x \mapsto K^x$ によって, 整数環 \mathbb{Z} と同型の環 (Ring) である。
- $\mathbb{Q}_{[K]}^+$ は, 写像 $\psi_K : x \mapsto K^x$ によって, 有理数体 \mathbb{Q} と同型の体 (Field) である。

なお, $\mathbb{N}_{[K]}^+, \mathbb{Z}_{[K]}^+, \mathbb{Q}_{[K]}^+, \mathbb{R}_{[K]}^+$ の包含関係は次のようになっている;

$$\mathbb{N}_{[K]}^+ \subsetneq \mathbb{Z}_{[K]}^+ \subsetneq \mathbb{Q}_{[K]}^+ \subsetneq \mathbb{R}_{[K]}^+$$

異なる2つの正の定数 $K_1(\neq 1), K_2(\neq 1)$ に対して, $\mathbb{N}_{[K_1]}^+$ と $\mathbb{N}_{[K_2]}^+$, $\mathbb{Z}_{[K_1]}^+$ と $\mathbb{Z}_{[K_2]}^+$, $\mathbb{Q}_{[K_1]}^+$ と $\mathbb{Q}_{[K_2]}^+$ は, それ各自然な要素からなる集合となる。

しかし, 環 $\mathbb{Z}_{[K_1]}^+$ と環 $\mathbb{Z}_{[K_2]}^+$, 体 $\mathbb{Q}_{[K_1]}^+$ と体 $\mathbb{Q}_{[K_2]}^+$ は, 写像 $\varphi : X \mapsto X^{\log_{K_1} K_2} [\iff \varphi : K_1^x \mapsto K_2^x]$ によってそれ自ら同型である。

例 15 環 $\mathbb{Z}_{[K_1]}^+$ と環 $\mathbb{Z}_{[K_2]}^+$ について。

- $K_1 = 2$ のとき, $\mathbb{Z}_{[2]}^+ = \left\{ \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots \right\}$
(あるいは $\mathbb{Z}_{[2]}^+ = \left\{ \dots, -8, -4, -2, 1, 2, 4, 8, \dots \right\}$ と書くこともできる。)
- $K_2 = \frac{1}{5}$ のとき, $\mathbb{Z}_{[\frac{1}{5}]}^+ = \left\{ \dots, 125, 25, 5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots \right\}$
(あるいは $\mathbb{Z}_{[\frac{1}{5}]}^+ = \left\{ \dots, \frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots \right\}$ と書くこともできる。)

このように, 集合 $\mathbb{Z}_{[2]}^+$ と集合 $\mathbb{Z}_{[\frac{1}{5}]}^+$ は, 異なる要素からなる集合である。しかし, 環 $\mathbb{Z}_{[2]}^+$ と環 $\mathbb{Z}_{[\frac{1}{5}]}^+$ は, 写像 $\varphi : X \mapsto X^{\log_2 \frac{1}{5}} [\iff \varphi : 2^x \mapsto \left(\frac{1}{5}\right)^x]$ によって同型である。

例 16 体 $\mathbb{Q}_{[K_1]}^+$ と体 $\mathbb{Q}_{[K_2]}^+$ について。

- $K_1 = 2$ のとき,
 $8 [= 2^3], \frac{1}{2} [= 2^{-1}], \sqrt[3]{2} [= 2^{\frac{1}{3}}]$ などは, $\mathbb{Q}_{[2]}^+$ に属する数である。
- $K_2 = \frac{1}{5}$ のとき,
 $8 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3\log_5 2}, \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 2}, \sqrt[3]{2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{\log_5 2}{3}}$ などは, $\mathbb{Q}_{[\frac{1}{5}]}^+$ には属しない数である。

このように, 集合 $\mathbb{Q}_{[2]}^+$ と集合 $\mathbb{Q}_{[\frac{1}{5}]}^+$ は, 異なる要素からなる集合である。しかし, 体 $\mathbb{Q}_{[2]}^+$ と体 $\mathbb{Q}_{[\frac{1}{5}]}^+$ は, 写像 $\varphi : X \mapsto X^{\log_2 \frac{1}{5}} [\iff \varphi : 2^x \mapsto \left(\frac{1}{5}\right)^x]$ によって同型である。

§ 7 加法_[K] の法則

§ 7.1 同類項の 和_[K], 同類項の 差_[K]

$\forall A, B, X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ とする。次の式は、分配法則 [III] から導かれる。

同類項の 和_[K], 同類項の 差_[K] (I)

- $(A_{[K]} \times X)_{[K]} + (B_{[K]} \times X)_{[K]} = (A_{[K]} + B_{[K]}) \times X_{[K]}$
- $(A_{[K]} \times X)_{[K]} - (B_{[K]} \times X)_{[K]} = (A_{[K]} - B_{[K]}) \times X_{[K]}$

$A = K^a, B = K^b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると、これは次のように書き換えられる；

同類項の 和_[K], 同類項の 差_[K] (II)

- $(K^a \times X)_{[K]} + (K^b \times X)_{[K]} = K^{a+b} \times X_{[K]}$
- $(K^a \times X)_{[K]} - (K^b \times X)_{[K]} = K^{a-b} \times X_{[K]}$

例 17 $K = 2$ のとき、 $X \in \mathbb{R}_{[2]}^+$ に対して

$$\begin{aligned} & \bullet \quad (32_{[2]} \times X)_{[2]} + (8_{[2]} \times X)_{[2]} \\ & \qquad = (32 + 8)_{[2]} \times X_{[2]} \\ & \qquad = (32 \times 8)_{[2]} \times X_{[2]} = 256 \times X_{[2]} \end{aligned}$$

◊ これを (II) で計算すると,

$$\begin{aligned} & (32_{[2]} \times X)_{[2]} + (8_{[2]} \times X)_{[2]} \\ & \qquad = (2^5 \times X)_{[2]} + (2^3 \times X)_{[2]} \\ & \qquad = (2^5 + 2^3)_{[2]} \times X_{[2]} \\ & \qquad = 2^{5+3} \times X_{[2]} = 2^8 \times X_{[2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad (32_{[2]} \times X)_{[2]} - (8_{[2]} \times X)_{[2]} \\ & \qquad = (32 - 8)_{[2]} \times X_{[2]} \\ & \qquad = (32 \div 8)_{[2]} \times X_{[2]} = 4 \times X_{[2]} \end{aligned}$$

◊ これを (II) で計算すると,

$$\begin{aligned} & (32_{[2]} \times X)_{[2]} - (8_{[2]} \times X)_{[2]} \\ & \qquad = (2^5 \times X)_{[2]} - (2^3 \times X)_{[2]} \\ & \qquad = (2^5 - 2^3)_{[2]} \times X_{[2]} \\ & \qquad = 2^{5-3} \times X_{[2]} = 2^2 \times X_{[2]} \end{aligned}$$

例 18 $K = 2$ のとき, $X \in \mathbb{R}_{[2]}^+$ に対して

- $(5 \times_{[2]} X) + (3 \times_{[2]} X)$
 $= (5 + 3) \times_{[2]} X$
 $= (5 \times 3) \times_{[2]} X = 15 \times_{[2]} X$

◊ これを (II) で計算すると,

$$\begin{aligned} & (5 \times_{[2]} X) + (3 \times_{[2]} X) \\ &= (2^{\log_2 5} \times_{[2]} X) + (2^{\log_2 3} \times_{[2]} X) \\ &= (2^{\log_2 5} + 2^{\log_2 3}) \times_{[2]} X \\ &= 2^{\log_2 5 + \log_2 3} \times_{[2]} X \\ &= 2^{\log_2 15} \times_{[2]} X = 15 \times_{[2]} X \end{aligned}$$

- $(5 \times_{[2]} X) - (3 \times_{[2]} X)$
 $= (5 - 3) \times_{[2]} X$
 $= (5 \div 3) \times_{[2]} X = \frac{5}{3} \times_{[2]} X$

◊ これを (II) で計算すると,

$$\begin{aligned} & (5 \times_{[2]} X) - (3 \times_{[2]} X) \\ &= (2^{\log_2 5} \times_{[2]} X) - (2^{\log_2 3} \times_{[2]} X) \\ &= (2^{\log_2 5} - 2^{\log_2 3}) \times_{[2]} X \\ &= 2^{\log_2 5 - \log_2 3} \times_{[2]} X \\ &= 2^{\log_2 \frac{5}{3}} \times_{[2]} X = \frac{5}{3} \times_{[2]} X \end{aligned}$$

同類項の 和_[K], 同類項の 差_[K] を求める際は, 「乗法単位元_[K] が (1 ではなく) K であること」, すなわち 「 $(X = 1 \times_{[K]} X$ ではなく^(脚注 14)) $X = K \times_{[K]} X$ であること^(脚注 15) 」に, 十分な注意が必要である。

間違えやすい同類項の計算 (I)

- $X + (A \times_{[K]} X) = (K + A) \times_{[K]} X \quad [= KA \times_{[K]} X]$
- $(A \times_{[K]} X) + X = (A + K) \times_{[K]} X \quad [= AK \times_{[K]} X]$
- $X - (A \times_{[K]} X) = (K - A) \times_{[K]} X \quad [= \frac{K}{A} \times_{[K]} X]$
- $(A \times_{[K]} X) - X = (A + K) \times_{[K]} X \quad [= \frac{A}{K} \times_{[K]} X]$

(脚注 14) § 2.2 で触れた通り, $\forall X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ に対して $1 \times_{[K]} X = 1$ である。

(脚注 15) § 6.1 で述べた「個数_[K] の数え方」によれば, X は (「X が 1 個」ではなく) 「X が K 個_[K]」である。

$A = K^a$ ($a \in \mathbb{R}$) とすると、これは次のように書き換えられる；

間違えやすい同類項の計算 (II)

- $X_{[K]} + (K^a \times X) = K^{1+a} \times X$
- $(K^a \times X) + X = K^{a+1} \times X$
- $X_{[K]} - (K^a \times X) = K^{1-a} \times X$
- $(K^a \times X) - X = K^{a-1} \times X$

例 19 $K = 2$ のとき、 $X \in \mathbb{R}_{[2]}^+$ に対して

- $$\begin{aligned} & (8 \times X) + X \\ &= (8 \times X) + (2 \times X) \\ &= (8 + 2) \times X \\ &= (8 \times 2) \times X = 16 \times X \end{aligned}$$

◊ これを (II) で計算すると,

$$\begin{aligned} & (8 \times X) + X \\ &= (2^3 \times X) + (2^1 \times X) \\ &= (2^3 + 2^1) \times X \\ &= 2^{3+1} \times X = 2^4 \times X = 16 \times X \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} & (7 \times X) - X \\ &= (7 \times X) - (2 \times X) \\ &= (7 - 2) \times X \\ &= (7 \div 2) \times X = \frac{7}{2} \times X \end{aligned}$$

◊ これを (II) で計算すると,

$$\begin{aligned} & (7 \times X) - X \\ &= (2^{\log_2 7} \times X) - (2^1 \times X) \\ &= (2^{\log_2 7} - 2^1) \times X \\ &= (2^{\log_2 7} - 2^{\log_2 2}) \times X \\ &= 2^{\log_2 7 - \log_2 2} \times X = 2^{\log_2 \frac{7}{2}} \times X = \frac{7}{2} \times X \end{aligned}$$

§ 7.2 \mathbb{K}^n 倍_[K]

$A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ とする。また、 $\mathbb{K}^n \in \mathbb{N}_{[K]}^+$ (すなわち $n \in \mathbb{N}$) とする。

Kⁿ倍_[K] の定義

\mathbb{K}^n 個_[K] の A の 和_[K]

$$\overbrace{A + A + \cdots + A}^{\mathbb{K}^n \text{ 個}}_{[K] \quad [K] \quad \cdots \quad [K]}$$

を、「 A の \mathbb{K}^n 倍_[K]」という。

「 A の \mathbb{K}^n 倍_[K]」は、次のようになる；

Kⁿ倍_[K](I)

$$\overbrace{A + A + \cdots + A}^{\mathbb{K}^n \text{ 個}}_{[K] \quad [K] \quad \cdots \quad [K]} = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{n \text{ 個}} = A^n$$

$A = \mathbb{K}^a$ ($a \in \mathbb{R}$) とすると、これは次のように書き換えられる；

Kⁿ倍_[K](II)

$$\overbrace{\mathbb{K}^a + \mathbb{K}^a + \cdots + \mathbb{K}^a}^{\mathbb{K}^n \text{ 個}}_{[K] \quad [K] \quad \cdots \quad [K]} = \overbrace{\mathbb{K}^a \cdot \mathbb{K}^a \cdots \mathbb{K}^a}^{n \text{ 個}} = (\mathbb{K}^a)^n = \mathbb{K}^{na}$$

また、「 A の \mathbb{K}^n 倍_[K]」を乗法_[K]を用いて書き表すと、次のようになる；

Kⁿ倍_[K](III)

$$\begin{aligned} \overbrace{A + A + \cdots + A}^{\mathbb{K}^n \text{ 個}}_{[K] \quad [K] \quad \cdots \quad [K]} &= \overbrace{(\mathbb{K} \times A) + (\mathbb{K} \times A) + \cdots + (\mathbb{K} \times A)}^{\mathbb{K}^n \text{ 個}}_{[K] \quad [K] \quad \cdots \quad [K]} \\ &= \overbrace{(\mathbb{K} + \mathbb{K} + \cdots + \mathbb{K}) \times A}^{\mathbb{K}^n \text{ 個}}_{[K] \quad [K] \quad \cdots \quad [K]} \\ &= \mathbb{K}^n \times A \end{aligned}$$

(III) の結果に $A = \mathbb{K}^a$ を代入したものは、(II) の結果と一致している^(脚注 16)。

(脚注 16) $\mathbb{K}^n \times_{[K]} A = \mathbb{K}^n \times_{[K]} \mathbb{K}^a = \mathbb{K}^{na}$

例 20

- $\overbrace{16 + 16 + 16}^{\text{K}^3 \text{ 個}_{[K]}} = \overbrace{16 \cdot 16 \cdot 16}^{3 \text{ 個}} = 16^3$ より, 16 の K^3 倍_[K] は 16^3 である。

◊ $K = 2$ のとき, $16 = 2^4$ として, これを (II) のように計算すると,

$$\overbrace{2^4 + 2^4 + 2^4}^{2^3 \text{ 個}_{[2]}} = 2^{\overbrace{4+4+4}^{3 \text{ 個}}} = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

◊ $K = 2$ のとき, これを (III) のように計算すると,

$$\overbrace{16 + 16 + 16}^{2^3 \text{ 個}_{[2]}} = 2^3 \times 16 \left[= 2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^{12} \right]$$

◊ $K = 5$ のとき, これを (III) のように計算すると,

$$\overbrace{16 + 16 + 16}^{5^3 \text{ 個}_{[5]}} = 5^3 \times 16 \left[= 5^3 \times 5^{\log_5 16} = 5^{3 \log_5 16} = (5^{\log_5 16})^3 = 16^3 \right]$$

◊ $K = \pi$ のとき, これを (III) のように計算すると,

$$\overbrace{16 + 16 + 16}^{\pi^3 \text{ 個}_{[\pi]}} = \pi^3 \times 16 \left[= \pi^3 \times \pi^{\log_\pi 16} = \pi^{3 \log_\pi 16} = (\pi^{\log_\pi 16})^3 = 16^3 \right]$$

§ 7.3 K^n 等分_[K]

$A, X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ とする。また, $\text{K}^n \in \mathbb{N}_{[K]}^+$ (すなわち $n \in \mathbb{N}$) とする。

————— **K^n 等分_[K] の定義** —————

K^n 個_[K] の X の 和_[K] が A に等しいとき, すなわち

$$\overbrace{X + X + \cdots + X}^{\text{K}^n \text{ 個}_{[K]}} = A$$

のとき, X を「 A の K^n 等分_[K]」という。

「 A の K^n 等分_[K]」は, 次のようになる;

————— **K^n 等分_[K](I)** —————

$$\begin{aligned} \overbrace{X + X + \cdots + X}^{\text{K}^n \text{ 個}_{[K]}} = A &\iff \overbrace{X \cdot X \cdots \cdot X}^{n \text{ 個}} = A \\ &\iff X^n = A \\ &\iff X = \sqrt[n]{A} \end{aligned}$$

$A = K^a$ ($a \in \mathbb{R}$) とすると、これは次のように書き換えられる；

K^n 等分 $_{[K]}$ (II)

$$\begin{aligned} \overbrace{X + X + \cdots + X}_{\substack{K^n \text{ 個 } \\ [K]}} &= K^a \iff \overbrace{X \cdot X \cdots \cdot X}^{n \text{ 個}} = K^a \\ &\iff X^n = K^a \\ &\iff X = \sqrt[n]{K^a} \end{aligned}$$

また、「 A の K^n 等分 $_{[K]}$ 」を乗法 $\div_{[K]}$ を用いて書き表すと、次のようになる；

K^n 等分 $_{[K]}$ (III)

$$\begin{aligned} \overbrace{X + X + \cdots + X}_{\substack{K^n \text{ 個 } \\ [K]}} &= A \iff K^n \times X = A \\ &\iff X = A \div_{[K]} K^n \left[= A \diagup_{[K]} K^n \right] \end{aligned}$$

(III) の結果に $A = K^a$ を代入したものは、(II) の結果と一致している(脚注 17)。

- 例 21** • $\overbrace{4 + 4 + 4}_{[K]} = \overbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}^{3 \text{ 個}} = 64$ より、 64 の K^3 等分 $_{[K]}$ は 4 である。
- ◊ 64 の K^3 等分 $_{[K]}$ を (I) を用いて求めると、 $\sqrt[3]{64} = 4$
 - ◊ $K = 2$ のとき、 $64 (= 2^6)$ の 2^3 等分 $_{[K]}$ を (II) を用いて求めると、
 $\sqrt[3]{2^6} = 2^{6 \cdot \frac{1}{3}} = 2^2$
 - ◊ $K = 2$ のとき、 64 の 2^3 等分 $_{[K]}$ を (III) を用いて求めると、
 $64 \diagup_{[2]} 2^3 \left[= 2^6 \div_{[2]} 2^3 = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 \right]$
 - ◊ $K = 5$ のとき、 64 の 5^3 等分 $_{[K]}$ を (III) を用いて求めると、
 $64 \diagup_{[5]} 5^3 \left[= 5^{\log_5 64} \div_{[5]} 5^3 = 5^{\frac{6 \log_5 2}{3}} = 5^{2 \log_5 2} = (5^{\log_5 2})^2 = 2^2 \right]$
 - ◊ $K = \pi$ のとき、 64 の π^3 等分 $_{[K]}$ を (III) を用いて求めると、
 $64 \diagup_{[\pi]} \pi^3 \left[= \pi^{\log_\pi 64} \div_{[\pi]} \pi^3 = \pi^{\frac{6 \log_\pi 2}{3}} = \pi^{2 \log_\pi 2} = (\pi^{\log_\pi 2})^2 = 2^2 \right]$

(脚注 17) $A \div_{[K]} K^n = K^a \div_{[K]} K^n = K^{\frac{a}{n}}$

§ 8 乗法_[K] の法則

§ 8.1 Kⁿ乗_[K]

実数体 \mathbb{R} において、「 n 個の数 a の 積_[K]」を「 a^n 」と表記して「 a の n 乗」と読む。これに倣い、 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における「 A の K^n 乗_[K]」を、次のように定める；
 $A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ とする。また、 $K^n \in \mathbb{N}_{[K]}^+$ （すなわち $n \in \mathbb{N}$ ）とする。

Kⁿ乗_[K] の定義

K^n 個_[K] の A の 積_[K]

$$\overbrace{A_{[K]} \times A_{[K]} \times \cdots \times A_{[K]}}^{K^n \text{ 個 } [K]}$$

を、「 A の K^n 乗_[K]」といい、 $A^{[K]K^n}$ と表記する；

$$A^{[K]K^n} := \overbrace{A_{[K]} \times A_{[K]} \times \cdots \times A_{[K]}}^{K^n \text{ 個 } [K]}$$

乗法_[K] の定義から、次の式が成り立つ；

Kⁿ乗_[K](I)

$$A^{[K]K^n} = K^{\overbrace{(\log_K A) \cdot (\log_K A) \cdots (\log_K A)}^{n \text{ 個}}} = K^{(\log_K A)^n}$$

$A = K^a$ ($a \in \mathbb{R}$) とすると、これは次のように書き換えられる；

Kⁿ乗_[K](II)

$$(K^a)^{[K]K^n} = K^{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ 個}}} = K^{a^n}$$

例 22 $K = 2$ のとき、

- $8^{[2]2^4} = \overbrace{8_{[2]} \times 8_{[2]} \times 8_{[2]} \times 8_{[2]}}^{2^4 \text{ 個 } [2]} = 2^{\overbrace{(\log_2 8) \cdot (\log_2 8) \cdot (\log_2 8) \cdot (\log_2 8)}^{4 \text{ 個}}} = 2^{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{4 \text{ 個}}} = 2^{3^4} = 2^{81}$
 ◇ これを、(II) のように計算すると、

$$(2^3)^{[2]2^4} = \overbrace{2^3_{[2]} \times 2^3_{[2]} \times 2^3_{[2]} \times 2^3_{[2]}}^{2^4 \text{ 個 } [2]} = 2^{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{4 \text{ 個}}} = 2^{3^4} = 2^{81}$$

§ 8.2 \mathbb{K}^n 乗根_[K]

実数体 \mathbb{R} において, $a \geq 0$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ のとき, 方程式 $x^n = a$ の解を「 $\sqrt[n]{a}$ 」と表記して「 a の n 乗根」と読む。これに倣い, $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における「 A の \mathbb{K}^n 乗根_[K]」を, 次のように定める。

\mathbb{K}^n 乗根_[K]の定義

$A \geq 1, X \geq 1$ とする。また, $\mathbb{K}^n \in \mathbb{N}_{[K]}^+$ (すなわち $n \in \mathbb{N}$) とする。

$X^{[K]\mathbb{K}^n} = \overbrace{X_{[K]} \times X_{[K]} \times \cdots \times X_{[K]}}^{\mathbb{K}^n \text{個}_{[K]}}$ が A に等しいとき, すなわち

$$X^{[K]\mathbb{K}^n} = A$$

を満たすとき, X を「 A の \mathbb{K}^n 乗根_[K]」といい, $\sqrt[n]{A}$ と表記する。

「 A の \mathbb{K}^n 乗根_[K]」は, 次のようになる;

\mathbb{K}^n 乗根_{[K](I)}

$$\begin{aligned} X^{[K]\mathbb{K}^n} = A &\iff \mathbb{K}^{(\log_K X)^n} = \mathbb{K}^{\log_K A} \\ &\iff (\log_K X)^n = \log_K A \\ &\iff \log_K X = \sqrt[n]{\log_K A} \\ &\iff X = \mathbb{K}^{\sqrt[n]{\log_K A}} \end{aligned}$$

であるから,

$$\sqrt[n]{A} = \mathbb{K}^{\sqrt[n]{\log_K A}}$$

$A = \mathbb{K}^a$ ($a \in \mathbb{R}$) とすると, これは次のように書き換えられる;

\mathbb{K}^n 乗根_{[K](II)}

$$\begin{aligned} X^{[K]\mathbb{K}^n} = \mathbb{K}^a &\iff \mathbb{K}^{(\log_K X)^n} = \mathbb{K}^a \\ &\iff (\log_K X)^n = a \\ &\iff \log_K X = \sqrt[n]{a} \\ &\iff X = \mathbb{K}^{\sqrt[n]{a}} \end{aligned}$$

であるから,

$$\sqrt[n]{\mathbb{K}^a} = \mathbb{K}^{\sqrt[n]{a}}$$

例 23 $K = 2$ のとき,

- $\overbrace{4 \times 4 \times 4}^{2^3 \text{ 個}_{[2]}} = \overbrace{2^2 \times 2^2 \times 2^2}^{2^3 \text{ 個}_{[2]}} = \overbrace{2^2 \cdot 2 \cdot 2}^{3 \text{ 個}} = 2^8 = 256$ より, 256 の 2^3 乗根 $_{[2]}$ は 4 である。
 - ◊ 256 の 2^3 乗根 $_{[2]}$ を (I) を用いて求めると,
 $\sqrt[2^3]{256} = 2^{\sqrt[3]{\log_2 256}} = 2^{\sqrt[3]{8}} = 2^2 = 4$
 - ◊ 256 の 2^3 乗根 $_{[2]}$ を (II) を用いて求めると,
 $\sqrt[2^3]{2^8} = 2^{\sqrt[3]{8}} = 2^2 = 4$

$A \geq_{[\underline{K}]} 1, B \geq_{[\underline{K}]} 1$ のとき^(脚注 18), 次の等式が成り立つ。

K^n 乗根 $_{[K]}$ の 積 $_{[K]}$

$A \geq_{[\underline{K}]} 1, B \geq_{[\underline{K}]} 1$ のとき,

$$\sqrt[K^n]{A} \times \sqrt[K^n]{B} = \sqrt[K^n]{A \times B}$$

(脚注 18) これは、通常の累乗根の等式 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ が成り立つための十分条件である「 $a \geqq 0, b \geqq 0$ 」に対応する。

§ 8.3 乗法公式_[K]

本節では、このあと § 9.2 で用いる公式のみ述べる^(脚注 19)。

乗法公式_[K]

$\forall A, B \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ に対して、次の等式が成り立つ；

$$(A_{[K]} + B_{[K]})^{[K]K^2} = A_{[K]}^{[K]K^2} + K^2 \times A_{[K]} \times B_{[K]} + B_{[K]}^{[K]K^2}$$

この等式を、2通りの方法で証明しておく^(脚注 20)。

証明その 1 分配法則^(脚注 21)および同類項の計算^(脚注 22)より、

$$\begin{aligned} (A_{[K]} + B_{[K]})^{[K]K^2} &= (A_{[K]} + B_{[K]}) \times (A_{[K]} + B_{[K]}) \\ &= A_{[K]} \times (A_{[K]} + B_{[K]}) + B_{[K]} \times (A_{[K]} + B_{[K]}) \\ &= A_{[K]}^{[K]K^2} + A_{[K]} \times B_{[K]} + B_{[K]} \times A_{[K]} + B_{[K]}^{[K]K^2} \\ &= A_{[K]}^{[K]K^2} + A_{[K]} \times B_{[K]} + A_{[K]} \times B_{[K]} + B_{[K]}^{[K]K^2} \\ &= A_{[K]}^{[K]K^2} + K^2 \times A_{[K]} \times B_{[K]} + B_{[K]}^{[K]K^2} \end{aligned}$$

(証明終)

証明その 2 $A = K^a, B = K^b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると、

$$\begin{aligned} (A_{[K]} + B_{[K]})^{[K]K^2} &= (K^a + K^b)_{[K]}^{[K]K^2} \\ &= (K^{a+b})^{[K]K^2} \\ &= K^{(a+b)^2} \\ &= K^{a^2+2ab+b^2} \\ &= K_{[K]}^{a^2} + K_{[K]}^{2ab} + K_{[K]}^{b^2} \\ &= (K^a)_{[K]}^{[K]K^2} + K_{[K]}^2 \times K_{[K]}^a \times K_{[K]}^b + (K^b)_{[K]}^{[K]K^2} \\ &= A_{[K]}^{[K]K^2} + K^2 \times A_{[K]} \times B_{[K]} + B_{[K]}^{[K]K^2} \end{aligned}$$

(証明終)

(脚注 19) この乗法公式_[K]は、 \mathbb{R} における $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ に対応するものである。

(脚注 20) 「証明その 1」の方が平易だが、 \mathbb{R} における $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ との関わりを見るために、「証明その 2」も並記した。

(脚注 21) § 2.1 の III を参照。

(脚注 22) § 7.1 を参照。

§ 9 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ における方程式の解法

§ 9.1 K 次_[K] 方程式

$A, B, X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ のとき, K 次_[K] 方程式(脚注 23)

$$A \times_{[K]} X + B = 1$$

を考える。これは、次のように解くことができる；

$$\begin{aligned} A \times_{[K]} X + B = 1 &\iff A \times_{[K]} X = -B \\ &\iff X = -B \diagup_{[K]} A \end{aligned}$$

すなわち、方程式 $A \times_{[K]} X + B = 1$ の解は $X = -B \diagup_{[K]} A$ である。

ここで、 $A = K^a$, $B = K^b$, $X = K^x$ ($a, b, x \in \mathbb{R}$) とすると、 $A \times_{[K]} X + B = 1$ は

$$K^{ax+b} = 1$$

と書くことができ、また

$$-B \diagup_{[K]} A = -K^b \diagup_{[K]} K^a = K^{-b} \diagup_{[K]} K^a = K^{-\frac{b}{a}}$$

であるから、次のことが言える；

方程式 $K^{ax+b} = 1$ を K^x について解くと、

$$K^x = K^{-\frac{b}{a}}$$

§ 9.2 K^2 次_[K] 方程式

$A, B, C, X \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ のとき、 K^2 次_[K] 方程式(脚注 23)

$$A \times_{[K]} X^{[K]K^2} + B \times_{[K]} X + C = 1$$

を考える(脚注 24)。これは、 $B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C \geqq 1$ のとき(脚注 25), § 8.3 の乗法公式_[K] を利用して、次のように解くことができる；

(脚注 23) 「K 次_[K] 方程式」は通常の「1 次方程式 (linear equation)」、「 K^2 次_[K] 方程式」は通常の「2 次方程式 (quadratic equation)」に対応している。

(脚注 24) これは、本稿「はじめに」の方程式②である。この方程式を解くことは、本稿の目的のひとつである。

(脚注 25) 本稿において、 K^n 乗根_[K] は 1 以上_[K] の数に対してしか定義していないため、このあとの方程式变形をするためにはこの条件が必要となる。見てわかる通り、これは、実数における 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の「判別式 $b^2 - 4ac \geqq 0$ のとき」に対応している。

$$\begin{aligned}
& A \times X^{[K]K^2} + B \times X + C = 1 \\
\iff & A \times \left(X^{[K]K^2} + B /_{[K]} A \times X \right) = -C \\
\iff & A \times \left(X^{[K]K^2} + B /_{[K]} A \times X + \left(B /_{[K]} (K^2 \times A) \right)^{[K]K^2} \right) = A \times \left(B /_{[K]} (K^2 \times A) \right)^{[K]K^2} - C \\
\iff & A \times \left(X^{[K]K^2} + K^2 \times B /_{[K]} (K^2 \times A) \times X + \left(B /_{[K]} (K^2 \times A) \right)^{[K]K^2} \right) = B^{[K]K^2} /_{[K]} (K^4 \times A) - C \\
\iff & A \times \left(X + B /_{[K]} (K^2 \times A) \right)^{[K]K^2} = (B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C) /_{[K]} (K^4 \times A) \\
\iff & \left(X + B /_{[K]} (K^2 \times A) \right)^{[K]K^2} = (B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C) /_{[K]} (K^4 \times A^{[K]K^2}) \\
\iff & X + B /_{[K]} (K^2 \times A) = \pm \sqrt{B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C} /_{[K]} (K^4 \times A^{[K]K^2}) \\
\iff & X + B /_{[K]} (K^2 \times A) = \left(\pm \sqrt{B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C} \right) /_{[K]} (K^2 \times A) \\
\iff & X = \left(-B \pm \sqrt{B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C} \right) /_{[K]} (K^2 \times A)
\end{aligned}$$

すなわち、方程式 $A \times X^{[K]K^2} + B \times X + C = 1$ (ただし $B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C \geq 1$) の解は、

$$X = \left(-B \pm \sqrt{B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C} \right) /_{[K]} (K^2 \times A)$$

である。

ここで、 $A = K^a$, $B = K^b$, $C = K^c$, $X = K^x$ ($a, b, c, x \in \mathbb{R}$) とすると、
 $A \times X^{[K]K^2} + B \times X + C = 1$ (ただし $B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C \geq 1$) は

$$K^{ax^2+bx+c} = 1 \quad (\text{ただし } b^2 - 4ac \geq 0)$$

と書くことができ、また

$$\begin{aligned}
& \left(-B \pm \sqrt{B^{[K]K^2} - K^4 \times A \times C} \right) /_{[K]} (K^2 \times A) \\
= & \left(-K^b \pm \sqrt{(K^b)^{[K]K^2} - K^4 \times K^a \times K^c} \right) /_{[K]} (K^2 \times K^a) \\
= & \left(K^{-b} \pm \sqrt{K^{b^2-4ac}} \right) /_{[K]} K^{2a} \\
= & \left(K^{-b} \pm K^{\sqrt{b^2-4ac}} \right) /_{[K]} K^{2a} = K^{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}
\end{aligned}$$

であるから、次のことが言える；

方程式 $K^{ax^2+bx+c} = 1$ (ただし $b^2 - 4ac \geq 0$) を K^x について解くと、

$$K^x = K^{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

§ 10 指数_[K]と対数_[K]

§ 10.1 指数_[K]の拡張

$A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ であるとき、 $\forall M, N \in \mathbb{N}_{[K]}^+$ に対して、次の「指数法則_[K]」が成り立つ。

自然数_[K]乗_[K]に関する指数法則_{[K](I)}

$A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ であるとき、 $\forall M, N \in \mathbb{N}_{[K]}^+$ に対して

- $A^{[K]M} \times_{[K]} A^{[K]N} = A^{[K]M+N}$
- $(A^{[K]M})^{[K]N} = A^{[K]M \times_{[K]} N}$

これは、 $M = K^m, N = K^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) とすると、次のように書き換えることができる；

自然数_[K]乗_[K]に関する指数法則_{[K](II)}

$A \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ であるとき、 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して

- $A^{[K]K^m} \times_{[K]} A^{[K]K^n} = A^{[K]K^{m+n}}$
- $(A^{[K]K^m})^{[K]K^n} = A^{[K]K^{mn}}$

例 24

- $A^{[K]K^2} \times_{[K]} A^{[K]K^3} = \overbrace{(A \times_{[K]} A)}^{K^2 \text{ 個 } [K]} \times_{[K]} \overbrace{(A \times_{[K]} A \times_{[K]} A)}^{K^3 \text{ 個 } [K]} = \overbrace{A \times_{[K]} A \times_{[K]} A \times_{[K]} A \times_{[K]} A}^{K^5 \text{ 個 } [K]} = A^{[K]K^5}$
- $(A^{[K]K^2})^{[K]K^3} = \overbrace{(A \times_{[K]} A)}^{(A \times A) \text{ が } K^3 \text{ 個 } [K]} \times_{[K]} \overbrace{(A \times_{[K]} A) \times_{[K]} (A \times_{[K]} A)}^{K^6 \text{ 個 } [K]} = \overbrace{A \times_{[K]} A \times_{[K]} A \times_{[K]} A \times_{[K]} A \times_{[K]} A}^{K^6 \text{ 個 } [K]} = A^{[K]K^6}$

次に、 A が正_[K]の数であるとき、「 A の K^n 乗_[K]」の定義を次のように拡張する(脚注 26)。

指数_[K]の定義の拡張 その 1 (1乗_[K])

A は正_[K]の数とする。

- 「 A の 1 乗_[K]」を、「 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の乗法単位元_[K]」として定義する。すなわち

$$A^{[K]1} := K$$

(脚注 26) 以下の拡張（その 1～その 4）は、 $a > 0$ に対する通常の指数 a^0, a^{-n} ($n \in \mathbb{N}$)、 $a^{\frac{m}{n}}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$)、 a^x ($x \in \mathbb{R}$) を定義する方法とまったく同様である。

指数_[K] の定義の拡張 その 2 (負_[K] の 整数_[K]乗_[K])

A は 正_[K] の数とする。

- 負_[K] の 整数_[K] である数 $\frac{N}{[K]} \ (N \in \mathbb{N}_{[K]}^+)$ に対して,
「A の $\frac{-N}{[K]}$ 乗_[K]」を、「A の N 乗_[K] の 乗法逆元_[K] (逆数_[K])」として定義する。

$$A^{[K]-N} := K_{[K]} \diagup A^{[K]N}$$

◇ $N = K^n \ (n \in \mathbb{N})$ とすると、この定義は次のように言い換えることもできる；

$$A^{[K]K^{-n}} := K_{[K]} \diagup A^{[K]K^n} \left[= K_{[K]} \diagup K^{(\log_K A)^n} = K^{\frac{1}{(\log_K A)^n}} \right]$$

例 25 $16^{[K]-K^3}$ は、
 $16^{[K]K^3} \left[= \overbrace{16 \times [K] \times 16}^{K^3 \text{ 個}} \right] = K^{\overbrace{\log_K 16 \cdot \log_K 16}^{3 \text{ 個}}} = K^{(\log_K 16)^3}$ の
 乗法逆元_[K] (逆数_[K])である。

- $K = 2$ のとき,
 $16^{[2]2^3} = 2^{(\log_2 16)^3} = 2^{4^3} = 2^{64}$ であるから,
 $16^{[2]-2^3}$ はその 乗法逆元_[2] (逆数_[2]) で、
 $16^{[2]-2^3} = 2_{[2]} \diagup 16^{[2]2^3} = 2_{[2]} \diagup 2^{64} = 2^{\frac{1}{64}}$
- $K = 4$ のとき,
 $16^{[4]4^3} = 4^{(\log_4 16)^3} = 4^{2^3} = 4^8$ であるから,
 $16^{[4]-4^3}$ はその 乗法逆元_[2] (逆数_[2]) で、
 $16^{[4]-4^3} = 4_{[4]} \diagup 16^{[4]4^3} = 4_{[4]} \diagup 4^8 = 4^{\frac{1}{8}}$

指数_[K] の定義の拡張 その 3 (有理数_[K]乗_[K])

A は 正_[K] の数とする。

- 有理数_[K] である数 $\frac{M}{[K]}N \ (M \in \mathbb{Z}_{[K]}^+, N \in \mathbb{N}_{[K]}^+)$ に対して,
「A の $\frac{M}{[K]}N$ 乗_[K]」を、「A の M 乗_[K] の N 乗根_[K]」として定義する。すなわち

$$A^{[K]\frac{M}{[K]}N} := \sqrt[n]{A^{[K]M}}$$

◇ $M = K^m, N = K^n \ (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ とすると、除法の定義より $K^m \diagup K^n = K^{\frac{m}{n}}$ であるから、この定義は次のように言い換えることもできる；

$$A^{[K]K^{m/n}} := \sqrt[n]{A^{[K]K^m}}$$

◇ $A^{[K]\frac{M}{[K]}N} \left[= A^{[K]K^{-m/n}} \right]$ は、 $A^{[K]\frac{M}{[K]}N} \left[= A^{[K]K^{m/n}} \right]$ の 乗法逆元_[K] (逆数_[K])である。

例 26 $256^{[K]K^{2/3}}$ は、 256 の K^2 乗根の K^3 乗根である。

また、 $256^{[K]K^{-2/3}}$ は、 $256^{[K]K^{2/3}}$ の乗法逆元 $_{[2]}$ （逆数 $_{[2]}$ ）である。

- $K = 2$ のとき、 $256^{[2]2^2} = 256 \times 256 = 2^8 \times 2^8 = 2^{16}$ であるから、

$$256^{[2]2^{2/3}} = \sqrt[2]{256^{[2]2^2}} = \sqrt[2]{2^{16}} = 2^{\frac{16}{2}} = 2^4$$

また、 $256^{[2]2^{-2/3}}$ は $256^{[2]2^{2/3}}$ の乗法逆元 $_{[2]}$ （逆数 $_{[2]}$ ）であり、 $256^{[2]2^{-2/3}} = 2^{\frac{1}{4}}$

- $K = 4$ のとき、 $256^{[4]4^2} = 256 \times 256 = 4^4 \times 4^4 = 4^{16}$ であるから、

$$256^{[4]4^{2/3}} = \sqrt[4]{256^{[4]4^2}} = \sqrt[4]{4^{16}} = 4^{\frac{16}{4}} = 4^4$$

また、 $256^{[4]4^{-2/3}}$ は $256^{[4]4^{2/3}}$ の乗法逆元 $_{[2]}$ （逆数 $_{[2]}$ ）であり、 $256^{[4]4^{-2/3}} = 4^{\frac{1}{4}}$

指數 $_{[K]}$ の定義の拡張 その 4 (無理数 $_{[K]}$ 乗根)

A は正 $_{[K]}$ の数とする。

- 無理数 $_{[K]}$ である数 X に対して、 X に収束する無限有理数列 $\{X_n\}$ ($X_n \in \mathbb{Q}_{[K]}^+$) を一つ定めるとき、 $A^{[K]X}$ を、数列 $\{A^{[K]X_n}\}$ の極限として定義する。すなわち、

$$A^{[K]X} := \lim_{n \rightarrow \infty} A^{[K]X_n}$$

◊ $X = K^x$ ($x \in \mathbb{R}$ は無理数) とし、 x に収束する無限有理数列 $\{x_n\}$ ($x_n \in \mathbb{Q}$) を一つ定めるとき、この定義は次のように言い換えることもできる；

$$A^{[K]K^x} := \lim_{n \rightarrow \infty} A^{[K]K^{x_n}}$$

整数 $_{[K]}$ 乗根、有理数 $_{[K]}$ 乗根、無理数 $_{[K]}$ 乗根を以上のように定義すると、前述の指數法則 $_{[K]}$ がすべて保たれる。

指數法則 $_{[K]}$ の拡張 (I)

A が正 $_{[K]}$ の数であるとき、 $\forall M, N \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ に対して

- $A^{[K]M} \times A^{[K]N} = A^{[K]M+N}$
- $(A^{[K]M})^{[K]N} = A^{[K]M \times N}$

指數法則 $_{[K]}$ の拡張 (II)

A が正 $_{[K]}$ の数であるとき、 $\forall m, n \in \mathbb{R}$ に対して

- $A^{[K]K^m} \times A^{[K]K^n} = A^{[K]K^{m+n}}$
- $(A^{[K]K^m})^{[K]K^n} = A^{[K]K^{mn}}$

§ 10.2 対数_[K]

実数体 \mathbb{R} においては, $a > 0, a \neq 1, m > 0$ に対して, $m = a^r$ を r について解いた式を $r = \log_a m$ と書き, この値 r を, a を底とする m の対数という。

これに倣い, 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ においても, $A_{[K]} > 1, A_{[K]} \neq K, M_{[K]} > 1$ に対して, $M = A^{[K]R}$ を R について解いた式を, 次のように定める;

対数_[K] の定義 (I)

$A_{[K]} > 1, A_{[K]} \neq K, M_{[K]} > 1$ であるとき,

$$M = A^{[K]R}$$

を満たす $R \in \mathbb{R}_{[K]}^+$ が存在する。この値 R を, A を底とする M の対数_[K] といい,

$$R = \log_{[K]A} M$$

と書く。

例 27

- $K = 2$ のとき,

$$16^{[2]2\sqrt{2}} = 16^{[2]2^{3/2}} = 2^{(\log_2 16)^{3/2}} = 2^{4^{3/2}} = 2^8 = 256 \text{ であるから,}$$

$$\log_{[2]16} 256 = 2\sqrt{2}$$

- $K = 4$ のとき,

$$16^{[4]16} = 16^{[4]4^2} = 4^{(\log_4 16)^2} = 4^{2^2} = 4^4 = 256 \text{ であるから,}$$

$$\log_{[4]16} 256 = 16$$

対数_[K] の定義 (I) において, $A = K^a$ ($a > 0, a \neq 1$), $M = K^m$ ($m > 0$) とおき, さらに $R = K^r$ ($r \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\begin{aligned} M = A^{[K]R} &\iff K^m = (K^a)^{[K]K^r} \\ &\iff K^m = K^{a^r} \\ &\iff m = a^r \\ &\iff r = \log_a m \\ &\iff K^r = K^{\log_a m} \\ &\iff R = K^{\log_a m} \end{aligned}$$

であるから, 次のことが言える;

対数_[K] の定義 (II)

$a > 0, a \neq 1, m > 0$ のとき,

$$\log_{[K] K^a} K^m = K^{\log_a m}$$

例 28

- $K = 2$ のとき,

$$\log_{[2] 16} 256 = \log_{[2] 2^4} 2^8 = 2^{\log_4 8} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

- $K = 4$ のとき,

$$\log_{[4] 16} 256 = \log_{[4] 4^2} 4^4 = 4^{\log_2 4} = 4^2 = 16$$

※ これらの結果を, **例 27** と比較してみよ。

対数_[K] の性質

- $\log_{[K] A} (M \times_{[K]} N) = \log_{[K] A} M + \log_{[K] A} N$

- $\log_{[K] A} M^{[K] N} = N \times_{[K]} \log_{[K] A} M$

証明

$A = K^a$ ($a > 0, a \neq 1$), $M = K^m$ ($m > 0$), $N = K^n$ ($n > 0$) とする,

- $\log_{[K] K^a} (K^m \times_{[K]} K^n)$
 $= \log_{[K] K^a} K^{mn} = K^{\log_a mn} = K^{\log_a m + \log_a n} = K^{\log_a m}_{[K]} + K^{\log_a n} = \log_{[K] K^a} K^m + \log_{[K] K^a} K^n$
- $\log_{[K] K^a} (K^m)^{[K] n}$
 $= \log_{[K] K^a} K^{m^n} = K^{\log_a m^n} = K^{n \cdot \log_a m} = K^n \times_{[K]} K^{\log_a m} = K^n \times \log_{[K] K^a} K^m$

(証明終)

あとがき

「方程式 $K^{ax^2+bx+c} = 1$ を K^x について解く」 という本稿の目的は, § 9.2 でひとまず達成できた。しかしそこには, 「 $b^2 - 4ac \geq 0$ の場合」 という条件が付いている。

「 $b^2 - 4ac < 0$ の場合」 の解を求めるためには, 体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の代数的閉包を作ることが必要となるが, 残念ながら, その考察を本稿に間に合わせることができなかった。

「体 $\mathbb{R}_{[K]}^+$ の代数的閉包」 については, また改めて記したいと考えている。

参考文献

特になし。