正の数全体の集合の体

参拾萬数学工房
（http://www.300000.net/）

はじめに

　ことの発端は，私がある日なんとなく，

「方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ということは，方程式

$$\boxed{\boldsymbol{e^{ax^2+bx+c}=1}} \cdots\cdots ①$$

の解も $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ なんだなあ…。」

と考えたことであった。

「きっと，方程式 ① を e^x について解けば，$e^x=e^{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ という解を，e^a，e^b，e^c の式で表すことができるだろう。」

そう思ったのだが，しかし，実際に試みたところ，これがなかなかうまくいかない(脚注 1)。

＊　＊　＊　＊　＊

　任意の 2 数 e^p，e^q に対して，加法 $\underset{[e]}{+}$ と乗法 $\underset{[e]}{\times}$ を次のように定める；

$$e^p \underset{[e]}{+} e^q := e^{p+q}$$
$$e^p \underset{[e]}{\times} e^q := e^{pq}$$

2 つの演算 $\underset{[e]}{+}$，$\underset{[e]}{\times}$ をこのように定めると，方程式 ① は

$$\boxed{\boldsymbol{e^a \underset{[e]}{\times} e^x \underset{[e]}{\times} e^x \underset{[e]}{+} e^b \underset{[e]}{\times} e^x \underset{[e]}{+} e^c = 1}}$$

と書き換えられる。さらに，$e^a=A$，$e^b=B$，$e^c=C$，$e^x=X$ と置換すれば，

$$\boxed{\boldsymbol{A \underset{[e]}{\times} X \underset{[e]}{\times} X \underset{[e]}{+} B \underset{[e]}{\times} X \underset{[e]}{+} C = 1}} \cdots\cdots ②$$

となる。方程式 ② は，「$\mathbb{R}$ における 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解法」と同じ手法で，X について解くことができるはずである。

(脚注 1) $a=\log e^a$，$b=\log e^b$，$c=\log e^c$ を $e^x=e^{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ に代入すれば，「e^x を e^a，e^b，e^c の式で表すこと」はできる。しかし，それは「ただ置換しただけ」であり，私が考えたいこととは全然異なるのである。

私は，「方程式 ② を $X\left[=e^x\right]$ について解き，解 $X=e^{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ を $A\left[=e^a\right]$，$B\left[=e^b\right]$，$C\left[=e^c\right]$ の式で表すこと」を 1 つの目標として，2 つの演算 $\underset{[e]}{+}$，$\underset{[e]}{\times}$ に対するさまざまな考察を行った。本稿は，その考察をまとめたものである。

＊　＊　＊　＊　＊

本稿において，$\mathtt{K}$ は常に「1 ではない正の定数（Constant）を表すものとする(脚注 2)。

正の定数 $\mathtt{K}(\neq 1)$ に対して新たに定める「加法 $\underset{[\mathtt{K}]}{+}$」と「乗法 $\underset{[\mathtt{K}]}{\times}$」を，通常の加法・乗法と区別するために，本稿ではそれぞれ「加法$_{[\mathtt{K}]}$」，「乗法$_{[\mathtt{K}]}$」と書くことにする。

そして，正の数全体の集合 $\mathbb{R}^+$ に 加法$_{[\mathtt{K}]}$ と 乗法$_{[\mathtt{K}]}$ を入れて体ができることを示し，この体 $\mathbb{R}^+(\underset{[\mathtt{K}]}{+},\underset{[\mathtt{K}]}{\times})$ に対して今後出てくる用語・演算・関数などには，すべてどこかに記号 $[\mathtt{K}]$ を付けて表すこととする。（逆に，通常の用語・演算子・関数などの表記は，すべて通常の意味を表すものとする。）

また，本稿においては，原則として，正の数全体の体 $\mathbb{R}^+(\underset{[\mathtt{K}]}{+},\underset{[\mathtt{K}]}{\times})$ の元とみなす正の数をアルファベット大文字（A，B，C，X，Y など）で表し，実数体 $\mathbb{R}$ の元とみなす実数をアルファベット小文字（a，b，c，x，y など）で表すこととする(脚注 3)。

(脚注 2) 定数 $\mathtt{K}$ は 1 以外の正の数であればよく，無理数でも構わない。なお，この定数 $\mathtt{K}$ のみ，他の文字との差別化としてタイプライタ体を用いた。

(脚注 3) 大文字と小文字は，例えば $A=\mathtt{K}^a$，$X=\mathtt{K}^x$ などのように対応させて用いる。

目次

§ 1　加法$_{[K]}$ と 乗法$_{[K]}$ の定義

§ 1.1　加法$_{[K]}$ の定義

2 数 $X, Y \in \mathbb{R}^+$ に対して，加法$_{[K]}$ を次のように定義する。

加法$_{[K]}$ の定義 (I)

$$X \underset{[K]}{+} Y := X \cdot Y$$

この定義から，明らかに，$X \underset{[K]}{+} Y$ の計算結果は K の値に依らない。

$X = K^x$，$Y = K^y$ （$x, y \in \mathbb{R}$）とすると，この定義は次のように書き換えられる；

加法$_{[K]}$ の定義 (II)

$$K^x \underset{[K]}{+} K^y := K^{x+y}$$

例 1　$K = 2$ のとき，

- $4 \underset{[2]}{+} 8 = 4 \cdot 8 = 32$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，$4 \underset{[2]}{+} 8 = 2^2 \underset{[2]}{+} 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

- $7 \underset{[2]}{+} 5 = 7 \cdot 5 = 35$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，
    $7 \underset{[2]}{+} 5 = 2^{\log_2 7} \underset{[2]}{+} 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 7} \cdot 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 7 + \log_2 5} = 2^{\log_2 (7 \cdot 5)} = 2^{\log_2 35} = 35$

§ 1.2　乗法$_{[\mathrm{K}]}$ の定義

2 数 $X, Y \in \mathbb{R}^+$ に対して，乗法$_{[\mathrm{K}]}$ を次のように定義する。

乗法$_{[\mathrm{K}]}$ の定義 (I)

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} Y := \mathrm{K}^{(\log_{\mathrm{K}} X)\cdot(\log_{\mathrm{K}} Y)}$$

$X = \mathrm{K}^x$，$Y = \mathrm{K}^y$ （$x, y \in \mathbb{R}$）とすると，この定義は次のように書き換えられる；

乗法$_{[\mathrm{K}]}$ の定義 (II)

$$\mathrm{K}^x \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^y := \mathrm{K}^{xy}$$

例 2　$\mathrm{K} = 2$ のとき，

- $4 \underset{[2]}{\times} 8 = 2^{(\log_2 4)\cdot(\log_2 8)} = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，$4 \underset{[2]}{\times} 8 = 2^2 \underset{[2]}{\times} 2^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$

- $7 \underset{[2]}{\times} 5 = 2^{(\log_2 7)\cdot(\log_2 5)}$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，$7 \underset{[2]}{\times} 5 = 2^{\log_2 7} \underset{[2]}{\times} 2^{\log_2 5} = 2^{(\log_2 7)\cdot(\log_2 5)}$

§ 1.3　加法$_{[\mathrm{K}]}$ と 乗法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する注意

$A \in \mathbb{R}^+$，$n \in \mathbb{N}$ に対して，通常の演算と同じように

$$\overbrace{A \underset{[\mathrm{K}]}{+} A \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} A}^{n \text{ 個}} = n \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A$$

が成り立つことを期待するが，残念ながらこの等式は一般には成り立たない。これについては，§ 6.1 と § 7.2 で詳述する。

§ 2　体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$

§ 2.1　$\mathbb{R}^{+}$ が 加法$_{[\mathrm{K}]}$ と 乗法$_{[\mathrm{K}]}$ によって体をなすこと

I. $\mathbb{R}^{+}$ が 加法$_{[\mathrm{K}]}$ に関してアーベル群をなすこと

[I(i)]　（加法$_{[\mathrm{K}]}$ に関して閉じている）

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{+}$ に対して

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{+} Y \in \mathbb{R}^{+}$$

[I(ii)]　（加法$_{[\mathrm{K}]}$ の結合法則）

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^{+}$ に対して

$$\left(X \underset{[\mathrm{K}]}{+} Y\right) \underset{[\mathrm{K}]}{+} Z = X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \left(Y \underset{[\mathrm{K}]}{+} Z\right)$$

[I(iii)]　（加法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する単位元（零元）の存在）

加法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する単位元（零元）は，$1 \in \mathbb{R}^{+}$ である。

（これを「加法単位元$_{[\mathrm{K}]}$（零元$_{[\mathrm{K}]}$）」と呼ぶことにする。）

$\forall X \in \mathbb{R}^{+}$ に対して

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{+} 1 = 1 \underset{[\mathrm{K}]}{+} X = X$$

[I(iv)]　（加法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する逆元の存在）

$X \in \mathbb{R}^{+}$ の，加法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する逆元は，$\dfrac{1}{X} \in \mathbb{R}^{+}$ である。

（これを「X の 加法逆元$_{[\mathrm{K}]}$」と呼ぶことにする）

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \frac{1}{X} = \frac{1}{X} \underset{[\mathrm{K}]}{+} X = 1$$

ここで，$X = \mathrm{K}^{x}$（$x \in \mathbb{R}$） とすると，これの 加法逆元$_{[\mathrm{K}]}$ は K^{-x} である。

$$\mathrm{K}^{x} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^{-x} = \mathrm{K}^{-x} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^{x} = \mathrm{K}$$

[I(v)]　（加法$_{[\mathrm{K}]}$ の交換法則）

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{+}$ に対して

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{+} Y = Y \underset{[\mathrm{K}]}{+} X$$

例 3

- [I(iii)] について。例えば $X = 8$ に対して $8 \underset{[\mathrm{K}]}{+} 1 = 8 \cdot 1 = 8$ となる。
- [I(iv)] について。例えば 8 の 加法逆元$_{[\mathrm{K}]}$ は $\dfrac{1}{8}$ であり，$8 \underset{[\mathrm{K}]}{+} \dfrac{1}{8} = 8 \cdot \dfrac{1}{8} = 1$ となる。

$\mathbb{R}^+$ から 加法単位元$_{[\mathrm{K}]}$（零元$_{[\mathrm{K}]}$）1 を除いた集合を $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ と表す。

II. $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ が 乗法$_{[\mathrm{K}]}$ に関してアーベル群をなすこと

[II(i)]　（乗法$_{[\mathrm{K}]}$ に関して閉じている）

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ に対して

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} Y \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$$

[II(ii)]　（乗法$_{[\mathrm{K}]}$ の結合法則）

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ に対して

$$\left(X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} Y\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} Z = X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \left(Y \underset{[\mathrm{K}]}{\times} Z\right)$$

[II(iii)]　（乗法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する単位元の存在）

乗法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する単位元は，$\mathrm{K} \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ である。

（これを「乗法単位元$_{[\mathrm{K}]}$」と呼ぶことにする）

$\forall X \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ に対して

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K} = \mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X = X$$

[II(iv)]　（乗法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する逆元の存在）

$X \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ の，乗法$_{[\mathrm{K}]}$ に関する逆元（逆数）は，$\mathrm{K}^{\frac{1}{\log_{\mathrm{K}} X}} \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ である。

（これを「X の 乗法逆元$_{[\mathrm{K}]}$（逆数$_{[\mathrm{K}]}$）」と呼ぶことにする）

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^{\frac{1}{\log_{\mathrm{K}} X}} = \mathrm{K}^{\frac{1}{\log_{\mathrm{K}} X}} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X = \mathrm{K}$$

ここで，$X = \mathrm{K}^x$（$x \in \mathbb{R}$，ただし $x \neq 0$）とすると，これの 乗法逆元$_{[\mathrm{K}]}$（逆数$_{[\mathrm{K}]}$）は $\mathrm{K}^{\frac{1}{x}}$ である。

$$\mathrm{K}^x \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{K}^{\frac{1}{x}} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^x = \mathrm{K}$$

[II(v)]　（乗法$_{[\mathrm{K}]}$ の交換法則）

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ に対して

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} Y = Y \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X$$

例 4

- [II(iii)] について。
  例えば $\mathrm{K} = 2$ のとき，$X = 8\left[= 2^3\right]$ に対して $8 \underset{[2]}{\times} 2 = 2^3 \underset{[2]}{\times} 2^1 = 2^{3\cdot 1} = 8$ となる。
- [II(iv)] について。
  例えば $\mathrm{K} = 2$ のとき，$8\left[= 2^3\right]$ の 乗法逆元$_{[2]}$（逆数$_{[2]}$）は $2^{\frac{1}{\log_2 8}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ であり，$8 \underset{[2]}{\times} 2^{1/\log_2 8} = 2^3 \underset{[2]}{\times} 2^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2$ となる。

III. 加法$_{[K]}$ と 乗法$_{[K]}$ に関して分配法則が成り立つこと

[III]　（分配法則）

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^+$ に対して

$$X \underset{[K]}{\times} \left(Y \underset{[K]}{+} Z\right) = \left(X \underset{[K]}{\times} Y\right) \underset{[K]}{+} \left(X \underset{[K]}{\times} Z\right)$$
$$\left(X \underset{[K]}{+} Y\right) \underset{[K]}{\times} Z = \left(X \underset{[K]}{\times} Z\right) \underset{[K]}{+} \left(Y \underset{[K]}{\times} Z\right)$$

[III] の証明

$X = \mathrm{K}^x$，$Y = \mathrm{K}^y$，$z = \mathrm{K}^z$ （$x, y, z \in \mathbb{R}$）とすると，

- $\mathrm{K}^x \underset{[K]}{\times} \left(\mathrm{K}^y \underset{[K]}{+} \mathrm{K}^z\right) = \mathrm{K}^{x(y+z)} = \mathrm{K}^{xy+xz} = \mathrm{K}^{xy} \cdot \mathrm{K}^{xz} = \left(\mathrm{K}^x \underset{[K]}{\times} \mathrm{K}^y\right) \underset{[K]}{+} \left(\mathrm{K}^x \underset{[K]}{\times} \mathrm{K}^z\right)$
- $\left(\mathrm{K}^x \underset{[K]}{+} \mathrm{K}^y\right) \underset{[K]}{\times} \mathrm{K}^z = \mathrm{K}^{(x+y)z} = \mathrm{K}^{xz+yz} = \mathrm{K}^{xz} \cdot \mathrm{K}^{yz} = \left(\mathrm{K}^x \underset{[K]}{\times} \mathrm{K}^z\right) \underset{[K]}{+} \left(\mathrm{K}^y \underset{[K]}{\times} \mathrm{K}^z\right)$

（証明終）

以上 [I]〜[III] より，正の数全体の集合 $\mathbb{R}^+$ は，加法$_{[K]}$ と 乗法$_{[K]}$ に関して体 (Field) をなす。

$\mathbb{R}^+_{[K]}$ の定義

$\mathbb{R}^+$ にこの 2 つの演算 $\underset{[K]}{+}$ と $\underset{[K]}{\times}$ を入れた体 $\mathbb{R}^+(\underset{[K]}{+}, \underset{[K]}{\times})$ を，今後は簡略化して

$$\mathbb{R}^+_{[K]}$$

と表すことにする。

§ 2.2　体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ の 加法単位元$_{[K]}$（零元$_{[K]}$）1 について

体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ の 加法単位元$_{[K]}$（零元$_{[K]}$）1 について，次のことが言える。

体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ の 加法単位元$_{[K]}$（零元$_{[K]}$）**1** の定義と性質

(i)　$\forall A \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ に対して，$A \underset{[K]}{+} 1 = 1 \underset{[K]}{+} A = A$　（定義）

(ii)　$\forall A \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ に対して，$A \underset{[K]}{\times} 1 = 1 \underset{[K]}{\times} A = 1$

(iii)　1 の 乗法逆元$_{[K]}$（逆数$_{[K]}$）は存在しない。

§ 3　体の同型

§ 3.1　写像 ψ_{K} と，体 $\mathbb{R}$ と 体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ の同型

体 $\mathbb{R}$ から体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ への写像 ψ_{K} を次のように定めると，これは同型写像である；

体 $\mathbb{R}$ から体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ への同型写像 ψ_{K}

体 $\mathbb{R}$ から体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ への全単射写像

$$\psi_{\mathrm{K}}：\ x \mapsto \mathrm{K}^{x}$$

は，$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\psi_{\mathrm{K}}(a+b) = \psi_{\mathrm{K}}(a) \underset{[\mathrm{K}]}{+} \psi_{\mathrm{K}}(b)$$
$$\psi_{\mathrm{K}}(a \times b) = \psi_{\mathrm{K}}(a) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \psi_{\mathrm{K}}(b)$$

の形で演算を保つ同型写像である。
（$a, b \in \mathbb{R}$，$\psi_{\mathrm{K}}(a), \psi_{\mathrm{K}}(b) \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ であることに注意。）

$\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ における「加法単位元$_{[\mathrm{K}]}$」，「乗法単位元$_{[\mathrm{K}]}$」は，それぞれ $\mathbb{R}$ における「加法単位元 0」，「乗法単位元 1」を写像 ψ_{K} によって移したものである(脚注 4)。

- $\psi_{\mathrm{K}}(0) = \mathrm{K}^{0} = 1 \cdots\cdots$ これは $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ の 加法単位元$_{[\mathrm{K}]}$ である。
- $\psi_{\mathrm{K}}(1) = \mathrm{K}^{1} = \mathrm{K} \cdots\cdots$ これは $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ の 乗法単位元$_{[\mathrm{K}]}$ である。

また，$\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ における「数 X の 加法逆元$_{[\mathrm{K}]}$」，「数 X の 乗法逆元$_{[\mathrm{K}]}$」は，それぞれ $\mathbb{R}$ における「数 x の加法逆元 $-x$」，「数 x の乗法逆元 $\dfrac{1}{x}$」を写像 ψ_{K} によって移したものである(脚注 5)。

- $\psi_{\mathrm{K}}(-x) = \mathrm{K}^{-x} \cdots\cdots$ これは $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ における数 $\psi_{\mathrm{K}}(x)\,[\,=\mathrm{K}^{x}]$ の 加法逆元$_{[\mathrm{K}]}$ である。
- $\psi_{\mathrm{K}}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{K}^{\frac{1}{x}} \cdots\cdots$ これは $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ における数 $\psi_{\mathrm{K}}(x)\,[\,=\mathrm{K}^{x}]$ の 乗法逆元$_{[\mathrm{K}]}$ である。

(脚注 4)　§ 2.1 の I(iii)，II(iii) を参照。
(脚注 5)　§ 2.1 の I(iv)，II(iv) を参照。

§ 3.2　写像 φ と，体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$ と 体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ の同型

異なる 2 つの正の定数 $\mathrm{K}_1(\neq 1)$，$\mathrm{K}_2(\neq 1)$ に対して，体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$ と体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ は同じ要素を持つ集合である(脚注 6) が，演算構造の異なる体になる。

例 5　$\mathrm{K}_1 = 2$，$\mathrm{K}_2 = 4$ のとき，

- 和$_{[\mathrm{K}]}$ に関して，
  - ◇ $\mathbb{R}^{+}_{[2]}$ における「64 と 16 の 和$_{[2]}$」は $64 \underset{[2]}{+} 16 = 2^6 \underset{[2]}{+} 2^4 = 2^{6+4} = 2^{10}$
  - ◇ $\mathbb{R}^{+}_{[4]}$ における「64 と 16 の 和$_{[4]}$」は $64 \underset{[4]}{+} 16 = 4^3 \underset{[2]}{+} 4^2 = 4^{3+2} = 4^5 \left[= 2^{10} \right]$

  となり，$64 \underset{[2]}{+} 16$ と $64 \underset{[4]}{+} 16$ は同じ値が得られる(脚注 7) 。
- 積$_{[\mathrm{K}]}$ に関して，
  - ◇ $\mathbb{R}^{+}_{[2]}$ における「64 と 16 の 積$_{[2]}$」は $64 \underset{[2]}{\times} 16 = 2^6 \underset{[2]}{\times} 2^4 = 2^{6\cdot 4} = 2^{24}$
  - ◇ $\mathbb{R}^{+}_{[4]}$ における「64 と 16 の 積$_{[4]}$」は $64 \underset{[4]}{\times} 16 = 4^3 \underset{[2]}{\times} 4^2 = 4^{3\cdot 2} = 4^6 \left[= 2^{12} \right]$

  となり，$64 \underset{[2]}{\times} 16$ と $64 \underset{[4]}{\times} 16$ では異なる値となる。

このように，体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ における 2 数 A, B の 和$_{[\mathrm{K}]}A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B$ は，定数 K に依らず同じ値となるが，体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ における 2 数 A, B の 積$_{[\mathrm{K}]}A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} B$ は，定数 K に依って異なる値となる。

しかし，体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$ から体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ への写像 φ を次のように定めると，2 つの体の間で演算を保つことができる(脚注 8) ；

体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$ から体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ への同型写像 φ (I)

体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$ から体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ への全単射写像

$$\varphi :\ X \mapsto X^{\log_{\mathrm{K}_1} \mathrm{K}_2}$$

は，$\forall A, B \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$ に対して

$$\varphi(A \underset{[\mathrm{K}_1]}{+} B) = \varphi(A) \underset{[\mathrm{K}_2]}{+} \varphi(B)$$
$$\varphi(A \underset{[\mathrm{K}_1]}{\times} B) = \varphi(A) \underset{[\mathrm{K}_2]}{\times} \varphi(B)$$

の形で演算を保つ同型写像である。
（$A, B \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$，$\varphi(A), \varphi(B) \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ であることに注意。）

(脚注 6)　体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$ と体 $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ は，いずれも正の数全体の集合 $\mathbb{R}^{+} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ である。

(脚注 7)　もちろん，加法$_{[\mathrm{K}]}$ の定義から，K の値によらず $64 \underset{[\mathrm{K}]}{+} 16 = 64 \cdot 16$ なのだから，和$_{[\mathrm{K}]}$ が一致するのは当然である。

(脚注 8)　φ は，§ 3.1 で定めた写像 $\psi_{\mathrm{K}} :\ x \mapsto \mathrm{K}^x$ を用いると $\varphi = \psi_{\mathrm{K}_2} \circ \psi_{\mathrm{K}_1}{}^{-1}$ と表すことができる。
そもそも，同型写像 ψ_{K_1} から $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]}$ が，同型写像 ψ_{K_2} から $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ が，それぞれ導出されるのであるから，写像 $\psi_{\mathrm{K}_2} \circ \psi_{\mathrm{K}_1}{}^{-1}$ によって $\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_1]} \cong \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}_2]}$ であることは自明である。

ここで，$X = \mathbb{k}_1{}^x$（$x \in \mathbb{R}$）とおくと，

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{k}_1{}^x) &= (\mathbb{k}_1{}^x)^{\log_{\mathbb{k}_1}\mathbb{k}_2} \\ &= \mathbb{k}_1{}^{x\cdot\log_{\mathbb{k}_1}\mathbb{k}_2} \\ &= \mathbb{k}_1{}^{\log_{\mathbb{k}_1}\mathbb{k}_2{}^x} = \mathbb{k}_2{}^x\end{aligned}$$

となるので，同型写像 φ は次のように書いた方が理解しやすい；

$\mathbb{R}^+_{[\mathbb{k}_1]}$ から $\mathbb{R}^+_{[\mathbb{k}_2]}$ への同型写像 φ (II)

$\mathbb{R}^+_{[\mathbb{k}_1]}$ から $\mathbb{R}^+_{[\mathbb{k}_2]}$ への全単射写像

$$\varphi:\ \mathbb{k}_1{}^x \mapsto \mathbb{k}_2{}^x$$

は，$\forall\mathbb{k}_1{}^a, \mathbb{k}_1{}^b \in \mathbb{R}^+_{[\mathbb{k}_1]}$（$a, b \in \mathbb{R}$）に対して

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{k}_1{}^a \underset{[\mathbb{k}_1]}{+} \mathbb{k}_1{}^b) = \varphi(\mathbb{k}_1{}^a) \underset{[\mathbb{k}_2]}{+} \varphi(\mathbb{k}_1{}^b) \\ \varphi(\mathbb{k}_1{}^a \underset{[\mathbb{k}_1]}{\times} \mathbb{k}_1{}^b) = \varphi(\mathbb{k}_1{}^a) \underset{[\mathbb{k}_2]}{\times} \varphi(\mathbb{k}_1{}^b)\end{aligned}$$

の形で演算を保つ同型写像である。
（$\mathbb{k}_1{}^a, \mathbb{k}_1{}^b \in \mathbb{R}^+_{[\mathbb{k}_1]}$，$\varphi(\mathbb{k}_1{}^a), \varphi(\mathbb{k}_1{}^b) \in \mathbb{R}^+_{[\mathbb{k}_2]}$ であることに注意。）

例 6　$\mathbb{k}_1 = 2$，$\mathbb{k}_2 = 4$ のとき，$\mathbb{R}^+_{[2]}$ から $\mathbb{R}^+_{[4]}$ への全単射写像として

$$\varphi:\ 2^x \mapsto 4^x$$

をとる。2 数 $64, 16 \in \mathbb{R}^+_{[2]}$ 対して，$64 = 2^6$，$16 = 2^4$ であることから，

$$\varphi(64) = \varphi(2^6) = 4^6, \qquad \varphi(16) = \varphi(2^4) = 4^4$$

となる。したがって，次のことが言える；

- $\underline{\varphi(A \underset{[\mathbb{k}_1]}{+} B) = \varphi(A) \underset{[\mathbb{k}_2]}{+} \varphi(B)}$ について。
  - ◇ $\varphi(64 \underset{[2]}{+} 16) = \varphi(2^6 \underset{[2]}{+} 2^4) = \varphi(2^{6+4}) = \varphi(2^{10}) = 4^{10}$
  - ◇ $\varphi(64) \underset{[4]}{+} \varphi(16) = \varphi(2^6) \underset{[4]}{+} \varphi(2^4) = 4^6 \underset{[4]}{+} 4^4 = 4^{6+4} = 4^{10}$

  であるから，確かに $\varphi(64 \underset{[2]}{+} 16) = \varphi(64) \underset{[4]}{+} \varphi(16)$ となっている。

- $\underline{\varphi(A \underset{[\mathbb{k}_1]}{\times} B) = \varphi(A) \underset{[\mathbb{k}_2]}{\times} \varphi(B)}$ について。
  - ◇ $\varphi(64 \underset{[2]}{\times} 16) = \varphi(2^6 \underset{[2]}{\times} 2^4) = \varphi(2^{6\cdot4}) = \varphi(2^{24}) = 4^{24}$
  - ◇ $\varphi(64) \underset{[4]}{\times} \varphi(16) = \varphi(2^6) \underset{[4]}{\times} \varphi(2^4) = 4^6 \underset{[4]}{\times} 4^4 = 4^{6\cdot4} = 4^{24}$

  であるから，確かに $\varphi(64 \underset{[2]}{\times} 16) = \varphi(64) \underset{[4]}{\times} \varphi(16)$ となっている。

写像 φ は同型写像なので，逆写像 φ^{-1} が存在する(脚注 9) ；

同型写像 φ の逆写像 φ^{-1}

$\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ から $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ への同型写像

$$\varphi:\ X \mapsto X^{\log_{\mathrm{K}_1}\mathrm{K}_2} \qquad [\iff \varphi:\ {\mathrm{K}_1}^x \mapsto {\mathrm{K}_2}^x]$$

に対して，φ の逆写像 φ^{-1} は $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ から $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ への同型写像で，

$$\varphi^{-1}:\ X \mapsto X^{\log_{\mathrm{K}_2}\mathrm{K}_1} \qquad \left[\iff \varphi^{-1}:\ {\mathrm{K}_2}^x \mapsto {\mathrm{K}_1}^x\right]$$

また，言うまでもないことではあるが，$\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ の 乗法単位元$_{[\mathrm{K}_1]}$ と $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ の 乗法単位元$_{[\mathrm{K}_2]}$ について，次のことが言える；

同型写像 φ と 乗法単位元$_{[\mathrm{K}]}$

- $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ の 乗法単位元$_{[\mathrm{K}_1]}$ である K_1 は，φ によって $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ の 乗法単位元$_{[\mathrm{K}_2]}$ である K_2 に移る。すなわち
$$\varphi(\mathrm{K}_1) = \mathrm{K}_2$$
- $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ の 乗法単位元$_{[\mathrm{K}_2]}$ である K_2 は，φ^{-1} によって $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ の 乗法単位元$_{[\mathrm{K}_1]}$ である K_1 に移る。すなわち
$$\varphi^{-1}(\mathrm{K}_2) = \mathrm{K}_1$$

(脚注 9) φ^{-1} は，§ 3.1 で述べた写像 $\psi_{\mathrm{K}}:\ x \mapsto \mathrm{K}^x$ を用いれば $\varphi^{-1} = \left(\psi_{\mathrm{K}_2} \circ {\psi_{\mathrm{K}_1}}^{-1}\right)^{-1} = \psi_{\mathrm{K}_1} \circ {\psi_{\mathrm{K}_2}}^{-1}$ である。

§ 4　減法$_{[K]}$ と 除法$_{[K]}$ の定義

§ 4.1　体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ における四則演算の用語

ここで，体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ における四則演算の用語を一括してまとめておくことにする。

体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ における四則演算の用語

- 体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ における加法 $\underset{[K]}{+}$ を「加法$_{[K]}$」と書き，その計算結果を「和$_{[K]}$」と書く。
- 体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ における減法 $\underset{[K]}{-}$ を「減法$_{[K]}$」と書き，その計算結果を「差$_{[K]}$」と書く。
- 体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ における乗法 $\underset{[K]}{\times}$ を「乗法$_{[K]}$」と書き，その計算結果を「積$_{[K]}$」と書く。
- 体 $\mathbb{R}^+_{[K]}$ における除法 $\underset{[K]}{\div}$ を「除法$_{[K]}$」と書き，その計算結果を「商$_{[K]}$」と書く。

§ 4.2　加法逆元$_{[K]}$ と 減法$_{[K]}$ の定義

$\forall X \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ に対して，$\dfrac{1}{X} \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ であり，かつ

$$X \underset{[K]}{+} \frac{1}{X} = X \cdot \frac{1}{X} = 1$$

である。1 は $\mathbb{R}^+_{[K]}$ の 加法単位元$_{[K]}$ であるから，$\dfrac{1}{X}$ は X の 加法逆元$_{[K]}$ である。

「$x \in \mathbb{R}$ の加法逆元」を「$-x$」と表記することに倣い，「$X \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ の 加法逆元$_{[K]}$」を，次のように定める；

加法逆元$_{[K]}$ の定義 (I)

$X \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ の 加法逆元$_{[K]}$ を，$\underset{[K]}{-}X$ と書くことにする。すなわち

$$\underset{[K]}{-}X := \frac{1}{X}$$

$X = \mathrm{K}^x$（$x \in \mathbb{R}$）とすると，これは次のように書き換えられる；

加法逆元$_{[K]}$ の定義 (II)

$$\underset{[K]}{-}\mathrm{K}^x = \mathrm{K}^{-x}$$

例 7　$\mathrm{K} = 2$ のとき，

- 32 の 加法逆元$_{[2]}$ は，$\underset{[2]}{-}32 = \dfrac{1}{32}$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，
    $\underset{[\mathrm{K}]}{-}32 = \underset{[\mathrm{K}]}{-}2^5 = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

- 13 の 加法逆元$_{[2]}$ は，$\underset{[2]}{-}13 = \dfrac{1}{13}$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，
    $\underset{[\mathrm{K}]}{-}13 = \underset{[\mathrm{K}]}{-}2^{\log_2 13} = 2^{-\log_2 13} = \dfrac{1}{2^{\log_2 13}} = \dfrac{1}{13}$

次に，減法 $\underset{[\mathrm{K}]}{-}$（減法$_{[\mathrm{K}]}$）を，加法逆元$_{[\mathrm{K}]}$ を用いて次のように定める；

減法$_{[\mathrm{K}]}$ の定義 (I)

2 数 $X, Y \in \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ に対して，X と Y の 差$_{[\mathrm{K}]}X \underset{[\mathrm{K}]}{-} Y$ を，「X と，Y の 加法逆元$_{[\mathrm{K}]}\underset{[\mathrm{K}]}{-}Y$ との和$_{[\mathrm{K}]}$」として定義する；

$$X \underset{[\mathrm{K}]}{-} Y := X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \left(\underset{[\mathrm{K}]}{-}Y\right) = X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \frac{1}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y} = \frac{X}{Y}$$

$X = \mathrm{K}^x$，$Y = \mathrm{K}^y$（$x, y \in \mathbb{R}$）とすると，これらは次のように書き換えられる；

減法$_{[\mathrm{K}]}$ の定義 (II)

$$\mathrm{K}^x \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^y = \mathrm{K}^{x-y}$$

例 8　$\mathrm{K} = 2$ のとき，

- $32 \underset{[2]}{-} 4 = \dfrac{32}{4} = 8$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，
    $32 \underset{[2]}{-} 4 = 2^5 \underset{[2]}{-} 2^2 = 2^{5-2} = 2^3 = 8$

- $7 \underset{[2]}{-} 5 = \dfrac{7}{5}$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，
    $7 \underset{[2]}{-} 5 = 2^{\log_2 7} \underset{[2]}{-} 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 7 - \log_2 5} = 2^{\log_2 \frac{7}{5}} = \dfrac{7}{5}$

§ 4.3　乗法逆元$_{[\mathsf{K}]}$（逆数$_{[\mathsf{K}]}$）と 除法$_{[\mathsf{K}]}$ の定義

1 でない数 $X \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathsf{K}]}$ (脚注 10) に対して，$\mathsf{K}^{\frac{1}{\log_{\mathsf{K}} X}} \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathsf{K}]}$ であり，かつ

$$X \underset{[\mathsf{K}]}{\times} \mathsf{K}^{\frac{1}{\log_{\mathsf{K}} X}} = \mathsf{K}^{\log_{\mathsf{K}} X} \underset{[\mathsf{K}]}{\times} \mathsf{K}^{\frac{1}{\log_{\mathsf{K}} X}} = \mathsf{K}^{\log_{\mathsf{K}} X \cdot \frac{1}{\log_{\mathsf{K}} X}} = \mathsf{K}$$

である。K は $\mathbb{R}^{+}_{[\mathsf{K}]}$ の 乗法単位元$_{[\mathsf{K}]}$ であるから，$\mathsf{K}^{\frac{1}{\log_{\mathsf{K}} X}}$ は X の 乗法逆元$_{[\mathsf{K}]}$（逆数$_{[\mathsf{K}]}$）である。

「$x \in \mathbb{R}$ の乗法逆元（逆数）」を $\dfrac{1}{x}$ と表記することに倣い，「$X \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathsf{K}]}$ の乗法逆元 $_{[\mathsf{K}]}$（逆数 $_{[\mathsf{K}]}$）」を，次のように定める(脚注 11)；

乗法逆元$_{[\mathsf{K}]}$（逆数$_{[\mathsf{K}]}$）の定義 (I)

1 でない数 $X \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathsf{K}]}$ の 乗法逆元$_{[\mathsf{K}]}$（逆数$_{[\mathsf{K}]}$）を，${}^{\mathsf{K}}\!\diagup_{[\mathsf{K}]}X$ と書くことにする。すなわち

$${}^{\mathsf{K}}\!\diagup_{[\mathsf{K}]}X := \mathsf{K}^{\frac{1}{\log_{\mathsf{K}} X}} \quad （ただし\ X \neq 1）$$

$X = \mathsf{K}^{x}$（$x \in \mathbb{R}$，ただし $x \neq 0$）とすると，この定義は次のように書き換えられる；

乗法逆元$_{[\mathsf{K}]}$（逆数$_{[\mathsf{K}]}$）の定義 (II)

$${}^{\mathsf{K}}\!\diagup_{[\mathsf{K}]}\mathsf{K}^{x} = \mathsf{K}^{\frac{1}{x}} \quad （ただし\ x \neq 0）$$

例 9　$\mathsf{K} = 2$ のとき，

- $32 \left[= 2^{5} \right]$ の 乗法逆元$_{[2]}$（逆数$_{[2]}$）は，${}^{2}\!\diagup_{[2]}32 = 2^{\frac{1}{\log_2 32}} = 2^{\frac{1}{5}}$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，${}^{2}\!\diagup_{[2]}32 = {}^{2}\!\diagup_{[2]}2^{5} = 2^{\frac{1}{5}}$
- $13 \left[= 2^{\log_2 13} \right]$ の 乗法逆元$_{[2]}$（逆数$_{[2]}$）は，${}^{2}\!\diagup_{[2]}13 = 2^{\frac{1}{\log_2 13}}$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，${}^{2}\!\diagup_{[2]}13 = {}^{2}\!\diagup_{[2]}2^{\log_2 13} = 2^{\frac{1}{\log_2 13}}$

(脚注 10) § 2.2 で述べた通り，加法単位元$_{[\mathsf{K}]}$（零元$_{[\mathsf{K}]}$）である 1 には 乗法逆元$_{[\mathsf{K}]}$（逆数$_{[\mathsf{K}]}$）は存在しないため，ここでは $X = 1$ を除外する。

(脚注 11) ここで定義した，「$\mathbb{R}^{+}_{[\mathsf{K}]}$ における X の 乗法逆元$_{[\mathsf{K}]}$」の表記は，このあと § 4.4 で定義する「（商の）分数型表記」に準じている。「$\dfrac{1}{x}$」の分子の「1」は $\mathbb{R}$ における乗法単位元であり，$\mathbb{R}^{+}_{[\mathsf{K}]}$ においてこれに対応する数は K であるため，X の 乗法逆元$_{[\mathsf{K}]}$（逆数$_{[\mathsf{K}]}$）は（${}^{1}\!\diagup_{[\mathsf{K}]}X$ ではなく）${}^{\mathsf{K}}\!\diagup_{[\mathsf{K}]}X$ となる。

次に，除法 $\underset{[K]}{\div}$（除法$_{[K]}$）を，乗法逆元$_{[K]}$（逆数$_{[K]}$)を用いて次のように定める；

除法$_{[K]}$ の定義 (I)

2 数 $X, Y \in \mathbb{R}^{+}_{[K]}$（ただし $Y{\neq}1$ とする）に対して，X と Y の 商$_{[K]}X \underset{[K]}{\div} Y$ を，「X と，Y の 乗法逆元$_{[K]}$ ${}^{K}\!\underset{[K]}{/}Y$ との 積$_{[K]}$」として定義する；

$$X \underset{[K]}{\div} Y := X \underset{[K]}{\times} {}^{K}\!\underset{[K]}{/}Y = K^{\log_K X} \underset{[K]}{\times} K^{\frac{1}{\log_K Y}} = K^{\log_K X \cdot \frac{1}{\log_K Y}} = K^{\frac{\log_K X}{\log_K Y}} \quad \text{（ただし } Y \neq 1\text{）}$$

$X = K^x$，$Y = K^y$（$x, y \in \mathbb{R}$，ただし $y \neq 0$）とすると，この定義は次のように書き換えられる；

除法$_{[K]}$ の定義 (II)

$$K^x \underset{[K]}{\div} K^y = K^{\frac{x}{y}} \quad \text{（ただし } y \neq 0\text{）}$$

例 10 $K = 2$ のとき，

- $32 \underset{[2]}{\div} 4 = 32 \underset{[2]}{\times} {}^{2}\!\underset{[2]}{/}4 = 2^{\frac{\log_4 32}{\log_4 4}} = 2^{\frac{5}{2}} \left[= 4\sqrt{2} \right]$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，$32 \underset{[2]}{\div} 4 = 2^5 \underset{[2]}{\div} 2^2 = 2^{\frac{5}{2}} \left[= 4\sqrt{2} \right]$
- $7 \underset{[2]}{\div} 5 = 7 \underset{[2]}{\times} {}^{2}\!\underset{[2]}{/}5 = 2^{\frac{\log_2 7}{\log_2 5}}$
  - ◇ これを定義 (II) で計算すると，$7 \underset{[2]}{\div} 5 = 2^{\log_2 7} \underset{[2]}{\div} 2^{\log_2 5} = 2^{\frac{\log_2 7}{\log_2 5}}$

§ 4.4　分数型表記$_{[K]}$

商$_{[K]}X \underset{[K]}{\div} Y$ を ${}^{X}\!\underset{[K]}{/}Y$ と書き，これを「(商$_{[K]}$ の）分数型表記$_{[K]}$」と呼ぶことにする。

（商$_{[K]}$ の）分数型表記$_{[K]}$

$${}^{X}\!\underset{[K]}{/}Y = X \underset{[K]}{\div} Y \quad \text{（ただし } Y \neq 1\text{）}$$

前ページの (脚注 11) で述べた通り，X の 乗法逆元$_{[K]}$（逆数$_{[K]}$)の表記 ${}^{K}\!\underset{[K]}{/}X$ は，この「分数型表記$_{[K]}$」に準じている。

§ 5　数の 大小関係$_{[\mathrm{K}]}$ と 正$_{[\mathrm{K}]}$負$_{[\mathrm{K}]}$

この節では，§ 3.1 で定めた写像 ψ_{K}： $x \mapsto \mathrm{K}^x$ によって，$\mathbb{R}$ における「大小関係」と「正負」を $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ に遺伝させる。

§ 5.1　数の 大小関係$_{[\mathrm{K}]}$

$\mathrm{K}^a, \mathrm{K}^b \in \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$（$a, b \in \mathbb{R}$）とするとき，大小関係$_{[\mathrm{K}]}$ を，次のように定義する；

大小関係$_{[\mathrm{K}]}$ の定義

2 数 $\mathrm{K}^a, \mathrm{K}^b \in \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ （$a, b \in \mathbb{R}$）に対して，K^a と K^b の 大小関係$_{[\mathrm{K}]}$ を，次のように定義する；

$$\mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{<} \mathrm{K}^b \quad \Longleftrightarrow \quad a < b$$

- $\mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{<} \mathrm{K}^b$（ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{K}^b \underset{[\mathrm{K}]}{>} \mathrm{K}^a$）のとき，
「K^a は K^b より 小さい$_{[\mathrm{K}]}$」または「K^b は K^a より 大きい$_{[\mathrm{K}]}$」などという。
- $\mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{\leqq} \mathrm{K}^b$（ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{K}^b \underset{[\mathrm{K}]}{\geqq} \mathrm{K}^a$） のとき，
「K^a は K^b 以下$_{[\mathrm{K}]}$」または「K^b は K^a 以上$_{[\mathrm{K}]}$」などという。

$\mathrm{K}^a = A$，$\mathrm{K}^b = B$ とすると，$\underline{\mathrm{K} > 1 \text{ の場合}}$ は「A と B の 大小関係$_{[\mathrm{K}]}$」と「A と B の（通常の）大小関係」が一致するが，$\underline{0 < \mathrm{K} < 1 \text{ の場合}}$ は逆になるので，注意が必要である。

大小関係の必要十分条件

- $\underline{\mathrm{K} > 1}$ のとき，
$$A \underset{[\mathrm{K}]}{<} B \quad \Longleftrightarrow \quad A < B$$
- $\underline{0 < \mathrm{K} < 1}$ のとき，
$$A \underset{[\mathrm{K}]}{<} B \quad \Longleftrightarrow \quad A > B$$

例 11
- $\mathrm{K} = 2$ のとき，$1 \underset{[2]}{<} 2 \underset{[2]}{<} 4 \underset{[2]}{<} 8 \underset{[2]}{<} 16 \underset{[2]}{<} 32$　である。
- $\mathrm{K} = \dfrac{1}{5}$ のとき，$1 \underset{[\frac{1}{5}]}{<} \dfrac{1}{5} \underset{[\frac{1}{5}]}{<} \dfrac{1}{25} \underset{[\frac{1}{5}]}{<} \dfrac{1}{125} \underset{[\frac{1}{5}]}{<} \dfrac{1}{625} \underset{[\frac{1}{5}]}{<} \dfrac{1}{3125}$　である。

例 12　1, 2, 3, 4, 5, 6 の大小関係は，
- $\mathrm{K} > 1$ のとき，$1 \underset{[\mathrm{K}]}{<} 2 \underset{[\mathrm{K}]}{<} 3 \underset{[\mathrm{K}]}{<} 4 \underset{[\mathrm{K}]}{<} 5 \underset{[\mathrm{K}]}{<} 6$　である。
- $0 < \mathrm{K} < 1$ のとき，$1 \underset{[\mathrm{K}]}{>} 2 \underset{[\mathrm{K}]}{>} 3 \underset{[\mathrm{K}]}{>} 4 \underset{[\mathrm{K}]}{>} 5 \underset{[\mathrm{K}]}{>} 6$　である。

§ 5.2　数の 正$_{[K]}$負$_{[K]}$

$A \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ とする。

実数体 $\mathbb{R}$ においては，加法単位元（零元）0 を基準として，$a > 0$ なる数 $a \in \mathbb{R}$ を「正の数」，$a < 0$ なる数 $a \in \mathbb{R}$ を「負の数」と呼ぶ。これに倣い，$\mathbb{R}^+_{[K]}$ においては，加法単位元$_{[K]}$（零元$_{[K]}$）1 を基準として，数 $A \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ の 正$_{[K]}$負$_{[K]}$ を次のように定める；

正$_{[K]}$ の数・負$_{[K]}$ の数の定義 (I)

- $A \underset{[K]}{>} 1$ であるとき，「A は 正$_{[K]}$ の数である」という。
- $A \underset{[K]}{<} 1$ であるとき，「A は 負$_{[K]}$ の数である」という。

ここで，$1 = K^0$ であるから，$A = K^a$ （$a \in \mathbb{R}$）とすると，大小関係$_{[K]}$ の定義より，次のことが成り立つ。

- $K^a \underset{[K]}{>} 1 \iff a > 0$
- $K^a \underset{[K]}{<} 1 \iff a < 0$

よって，定義 (I) は，次のように書き換えることができる。

正$_{[K]}$ の数・負$_{[K]}$ の数の定義 (II)

- $a > 0$ であるとき，「K^a は 正$_{[K]}$ の数である」という。
- $a < 0$ であるとき，「K^a は 負$_{[K]}$ の数である」という。

定義 (II) より，$\mathbb{R}^+_{[K]}$ における 積$_{[K]}$ の 正$_{[K]}$負$_{[K]}$ について，次のことが直ちにわかる；

積$_{[K]}$ の 正$_{[K]}$負$_{[K]}$

$$(\text{正}_{[K]}) \underset{[K]}{\times} (\text{正}_{[K]}) = (\text{正}_{[K]})$$
$$(\text{正}_{[K]}) \underset{[K]}{\times} (\text{負}_{[K]}) = (\text{負}_{[K]})$$
$$(\text{負}_{[K]}) \underset{[K]}{\times} (\text{正}_{[K]}) = (\text{負}_{[K]})$$
$$(\text{負}_{[K]}) \underset{[K]}{\times} (\text{負}_{[K]}) = (\text{正}_{[K]})$$

ある数 $A \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ の 正$_{[\mathrm{K}]}$負$_{[\mathrm{K}]}$ は，$\underline{\mathrm{K} > 1 \text{ の場合}}$ と $\underline{0 < \mathrm{K} < 1 \text{ の場合}}$ とで次のように入れ替わるので，注意が必要である。

正$_{[\mathrm{K}]}$ の数・負$_{[\mathrm{K}]}$ の数 の必要十分条件

- $\underline{\mathrm{K} > 1}$ のとき，
  - $\diamond$ $A \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ が「正$_{[\mathrm{K}]}$ の数」である $\iff$ $A > 1$
  - $\diamond$ $A \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ が「負$_{[\mathrm{K}]}$ の数」である $\iff$ $0 < A < 1$
- $\underline{0 < \mathrm{K} < 1}$ のとき，
  - $\diamond$ $A \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ が「正$_{[\mathrm{K}]}$ の数」である $\iff$ $0 < A < 1$
  - $\diamond$ $A \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ が「負$_{[\mathrm{K}]}$ の数」である $\iff$ $A > 1$

$\boxed{\text{例 } \mathbf{13}}$

- $\mathrm{K} = 2$ のとき，
  - $\diamond$ 2，8，$16\sqrt{2}$，19 などは，正$_{[2]}$ の数である。
    （$\because\ 2 = 2^{1}$，$8 = 2^{3}$，$16\sqrt{2} = 2^{\frac{9}{2}}$，$19 = 2^{\log_2 19}$ ）
  - $\diamond$ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{19}$ などは，負$_{[2]}$ の数である。
    （$\because\ \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$，$\dfrac{1}{8} = 2^{-3}$，$\dfrac{1}{16\sqrt{2}} = 2^{-\frac{9}{2}}$，$\dfrac{1}{19} = 2^{-\log_2 19}$ ）
- $\mathrm{K} = \dfrac{1}{2}$ のとき，
  - $\diamond$ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{19}$ などは，正$_{[\frac{1}{2}]}$ の数である。
    （$\because\ \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}$，$\dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}$，$\dfrac{1}{16\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{9}{2}}$，$\dfrac{1}{19} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 19}$ ）
  - $\diamond$ 2，8，$16\sqrt{2}$，19 などは，負$_{[\frac{1}{2}]}$ の数である。
    （$\because\ 2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$，$8 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$，$16\sqrt{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{9}{2}}$，$19 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\log_2 19}$ ）

§ 6　個数$_{[K]}$ の数え方と数の分類

そもそも加法とは，「個数の合計」を出すときに利用したいものである。しかし，2 個と 3 個を合わせた個数の合計は，$\mathbb{R}^+_{[K]}$ の 加法$_{[K]}$$2 \underset{[K]}{+} 3$ では求められない。

また，後ほど § 10 にて「指数$_{[K]}$」と「対数$_{[K]}$」を定義するが，実数体 $\mathbb{R}$ における指数法則（例えば $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$）や対数の性質（例えば $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$）を $\mathbb{R}^+_{[K]}$ に拡張する際にも，「個数の合計」を 加法$_{[K]}$ によって出せないと都合が悪い。

そのためには，$\mathbb{R}^+_{[K]}$ における「個数」について，$\mathbb{R}$ とは異なる数え方を採用するしか方法がない。

§ 6.1　個数$_{[K]}$ の数え方

以後，「$\mathbb{R}^+_{[K]}$ における個数」を，「個数$_{[K]}$」と略記する。

個数$_{[K]}$ の数え方の定義

「個数$_{[K]}$」は，単位を「個$_{[K]}$」として，順に次のように数える；

$$K個_{[K]}, \quad K^2個_{[K]}, \quad K^3個_{[K]}, \quad K^4個_{[K]}, \quad K^5個_{[K]}, \quad \cdots$$

§ 1.3 で注意した通り，**「$A \underset{[K]}{+} A \underset{[K]}{+} A = 3 \underset{[K]}{\times} A$」は一般には成り立たない**(脚注 12)。しかし，個数$_{[K]}$ をこのように定義すると，$A \underset{[K]}{+} A \underset{[K]}{+} A$ は次の 例 14 のように計算することができる。（これについては，§ 7.2 にて改めて述べる。）

例 14　$A \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ とする。$A \underset{[K]}{+} A \underset{[K]}{+} A$ について，次の等式が成り立つ。

- $K = 2$ のとき，$A \underset{[2]}{+} A \underset{[2]}{+} A$ は，「$2^3\ [=8]$ 個$_{[2]}$ の A を加えたもの」であり，
  $A \underset{[2]}{+} A \underset{[2]}{+} A = 2^3 \underset{[2]}{\times} A \left[= 8 \underset{[2]}{\times} A \right]$
- $K = 5$ のとき，$A \underset{[5]}{+} A \underset{[5]}{+} A$ は，「$5^3\ [=125]$ 個$_{[5]}$ の A を加えたもの」であり，
  $A \underset{[5]}{+} A \underset{[5]}{+} A = 5^3 \underset{[5]}{\times} A \left[= 125 \underset{[5]}{\times} A \right]$
- $K = \pi$ のとき，$A \underset{[\pi]}{+} A \underset{[\pi]}{+} A$ は，「π^3 個$_{[\pi]}$ の A を加えたもの」であり，
  $A \underset{[\pi]}{+} A \underset{[\pi]}{+} A = \pi^3 \underset{[\pi]}{\times} A$

例 14 の 3 つの計算は，結果が異なってしまったように見えるが，しかし実際には，いずれも 加法$_{[K]}$ の定義通りに計算して出てくる値に等しい(脚注 13)。§ 7.2 例 20 参照。

(脚注 12)　余談だが，この等式が成り立つのは，$A = 1$ のとき（つまり A が 加法単位元$_{[K]}$（零元$_{[K]}$)のとき）と，または $K = \sqrt[3]{3}$ のときのみである。

(脚注 13)　加法$_{[K]}$ の定義通りに計算すると，$A \underset{[K]}{+} A \underset{[K]}{+} A = A \cdot A \cdot A = A^3$ となる。

§ 6.2　数の分類（自然数$_{[K]}$，整数$_{[K]}$，有理数$_{[K]}$）

ここでは，§ 3.1 で定めた写像 ψ_K : $x \mapsto K^x$ によって，$\mathbb{R}$ における「自然数」，「整数」，「有理数」，「無理数」を $\mathbb{R}^+_{[K]}$ に遺伝させる。

自然数$_{[K]}$，整数$_{[K]}$，有理数$_{[K]}$，無理数$_{[K]}$ の定義

$A = K^a$（$a \in \mathbb{R}$） とする。

- $a \in \mathbb{N}$ であるとき（つまり a が通常の自然数であるとき），A は「自然数$_{[K]}$」であるという。
  - ◇ 個数$_{[K]}$ を数える際に用いる数 K，K^2，K^3，K^4，K^5，$\cdots$ が，「自然数$_{[K]}$」である。
- $a \in \mathbb{Z}$ であるとき（つまり a が通常の整数であるとき），A は「整数$_{[K]}$」であるという。
  - ◇ $a \in \mathbb{Z}$ が正の整数のとき，K^a は「正$_{[K]}$ の 整数$_{[K]}$」である。
    なお，「正$_{[K]}$ の 整数$_{[K]}$」は「自然数$_{[K]}$」と同義である。
  - ◇ $a \in \mathbb{Z}$ が負の整数のとき，K^a は「負$_{[K]}$ の 整数$_{[K]}$」である。
  - ◇ $a = 0$ のときは $K^0 = 1$（すなわち，加法単位元$_{[K]}$）であり，これも 整数$_{[K]}$ である。
- $a \in \mathbb{Q}$ であるとき（つまり a を通常の有理数であるとき），A は「有理数$_{[K]}$」であるという。
- $a \in \mathbb{R}$ が無理数のとき，A は「無理数$_{[K]}$」であるという。

ところで，$\underset{[K]}{-}K^a = K^{-a}$ であるから，「負$_{[K]}$ の 整数$_{[K]}$」は，次のように定義することもできる。

負$_{[K]}$ の 整数$_{[K]}$ の定義 (II)

A が「自然数$_{[K]}$（正$_{[K]}$ の 整数$_{[K]}$）」であるとき，A の 加法逆元$_{[K]}$ $\underset{[K]}{-}A$ を「負$_{[K]}$ の 整数$_{[K]}$」という。

また，$K^m = M$，$K^m = N$（ただし m，$n \in \mathbb{Z}$）とおくと，除法の定義（§ 4.3）より

$$M \underset{[K]}{\div} N = K^m \underset{[K]}{\div} K^n = K^{\frac{m}{n}}$$

であることから，「有理数 」は，次のように定義することもできる。

有理数$_{[K]}$ の定義 (II)

M, N が 整数$_{[K]}$ であるとき，$M \underset{[K]}{/} N$ を「有理数$_{[K]}$」という。

自然数$_{[\mathrm{K}]}$ の集合 $\mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]}$，整数$_{[\mathrm{K}]}$ の集合 $\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}]}$，有理数$_{[\mathrm{K}]}$ の集合 $\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}]}$

$\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ における 自然数$_{[\mathrm{K}]}$ の集合，整数$_{[\mathrm{K}]}$ の集合，有理数$_{[\mathrm{K}]}$ の集合を，それぞれ次のように表記する；

$$\mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]},\qquad \mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}]},\qquad \mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}]}$$

- $\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}]}$ は，写像 $\psi_{\mathrm{K}}:\ x \mapsto \mathrm{K}^x$ によって，整数環 $\mathbb{Z}$ と同型の環（Ring）である。
- $\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}]}$ は，写像 $\psi_{\mathrm{K}}:\ x \mapsto \mathrm{K}^x$ によって，有理数体 $\mathbb{Q}$ と同型の体（Field）である。

なお，$\mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]}$，$\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}]}$，$\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}]}$，$\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ の包含関係は次のようになっている；

$$\mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]} \quad \subsetneq \quad \mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}]} \quad \subsetneq \quad \mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}]} \quad \subsetneq \quad \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$$

異なる 2 つの正の定数 $\mathrm{K}_1(\neq 1)$, $\mathrm{K}_2(\neq 1)$ に対して，$\mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ と $\mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}_2]}$，$\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ と $\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}_2]}$，$\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ と $\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ は，それぞれ異なる要素からなる集合となる。

しかし, 環 $\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ と環 $\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}_2]}$, 体 $\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ と体 $\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ は, 写像 $\varphi:\ X \mapsto X^{\log_{\mathrm{K}_1}\mathrm{K}_2}$ $[\iff \varphi:\ \mathrm{K}_1{}^x \mapsto \mathrm{K}_2{}^x]$ によってそれぞれ同型である。

例 15 環 $\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ と環 $\mathbb{Z}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ について。

- $\mathrm{K}_1 = 2$ のとき，$\mathbb{Z}^+_{[2]} = \left\{\cdots,\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots\right\}$
（あるいは　$\mathbb{Z}^+_{[2]} = \left\{\cdots,\ \underset{[2]}{-}8,\ \underset{[2]}{-}4,\ \underset{[2]}{-}2,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots\right\}$　と書くこともできる。）
- $\mathrm{K}_2 = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\mathbb{Z}^+_{[\frac{1}{5}]} = \left\{\cdots,\ 125,\ 25,\ 5,\ 1,\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{25},\ \dfrac{1}{125},\ \cdots\right\}$
（あるいは　$\mathbb{Z}^+_{[\frac{1}{5}]} = \left\{\cdots,\ \underset{[\frac{1}{5}]}{-}\dfrac{1}{125},\ \underset{[\frac{1}{5}]}{-}\dfrac{1}{25},\ \underset{[\frac{1}{5}]}{-}\dfrac{1}{5},\ 1,\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{25},\ \dfrac{1}{125},\ \cdots\right\}$　と書くこともできる。）

このように，集合 $\mathbb{Z}^+_{[2]}$ と集合 $\mathbb{Z}^+_{[\frac{1}{5}]}$ は，異なる要素からなる集合である。しかし，環 $\mathbb{Z}^+_{[2]}$ と環 $\mathbb{Z}^+_{[\frac{1}{5}]}$ は，写像 $\varphi:\ X \mapsto X^{\log_2 \frac{1}{5}}\left[\iff \varphi:\ 2^x \mapsto \left(\dfrac{1}{5}\right)^x\right]$ によって同型である。

例 16 体 $\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}_1]}$ と体 $\mathbb{Q}^+_{[\mathrm{K}_2]}$ について。

- $\mathrm{K}_1 = 2$ のとき，
$8\left[=2^3\right]$，$\dfrac{1}{2}\left[=2^{-1}\right]$，$\sqrt[3]{2}\left[=2^{\frac{1}{3}}\right]$ などは，$\mathbb{Q}^+_{[2]}$ に属する数である。
- $\mathrm{K}_2 = \dfrac{1}{5}$ のとき，
$8\left[=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3\log_5 2}\right]$，$\dfrac{1}{2}\left[=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_5 2}\right]$，$\sqrt[3]{2}\left[=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{\log_5 2}{3}}\right]$ などは，$\mathbb{Q}^+_{[\frac{1}{5}]}$ には属さない数である。

このように，集合 $\mathbb{Q}^+_{[2]}$ と集合 $\mathbb{Q}^+_{[\frac{1}{5}]}$ は，異なる要素からなる集合である。しかし，体 $\mathbb{Q}^+_{[2]}$ と体 $\mathbb{Q}^+_{[\frac{1}{5}]}$ は，写像 $\varphi:\ X \mapsto X^{\log_2 \frac{1}{5}}\left[\iff \varphi:\ 2^x \mapsto \left(\dfrac{1}{5}\right)^x\right]$ によって同型である。

§ 7　加法$_{[\mathrm{K}]}$ の法則

§ 7.1　同類項の 和$_{[\mathrm{K}]}$，同類項の 差$_{[\mathrm{K}]}$

$\forall A, B, X \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ とする。次の式は，分配法則 [III] から導かれる。

同類項の 和$_{[\mathrm{K}]}$，同類項の 差$_{[\mathrm{K}]}$ (I)

- $\left(A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) \underset{[\mathrm{K}]}{+} \left(B \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) = \left(A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X$
- $\left(A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) \underset{[\mathrm{K}]}{-} \left(B \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) = \left(A \underset{[\mathrm{K}]}{-} B\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X$

$A = \mathrm{K}^{a}$，$B = \mathrm{K}^{b}$（$a, b \in \mathbb{R}$）とすると，これは次のように書き換えられる；

同類項の 和$_{[\mathrm{K}]}$，同類項の 差$_{[\mathrm{K}]}$ (II)

- $\left(\mathrm{K}^{a} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) \underset{[\mathrm{K}]}{+} \left(\mathrm{K}^{b} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) = \mathrm{K}^{a+b} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X$
- $\left(\mathrm{K}^{a} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) \underset{[\mathrm{K}]}{-} \left(\mathrm{K}^{b} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) = \mathrm{K}^{a-b} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X$

例 17　$\mathrm{K} = 2$ のとき，$X \in \mathbb{R}^{+}_{[2]}$ に対して

- $$\begin{aligned}&\left(32 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} \left(8 \underset{[2]}{\times} X\right)\\ &= \left(32 \underset{[2]}{+} 8\right) \underset{[2]}{\times} X\\ &= (32 \times 8) \underset{[2]}{\times} X = 256 \underset{[2]}{\times} X\end{aligned}$$
  - ◇ これを (II) で計算すると，
    $$\begin{aligned}&\left(32 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} \left(8 \underset{[2]}{\times} X\right)\\ &= \left(2^{5} \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} \left(2^{3} \underset{[2]}{\times} X\right)\\ &= \left(2^{5} \underset{[2]}{+} 2^{3}\right) \underset{[2]}{\times} X\\ &= 2^{5+3} \underset{[2]}{\times} X = 2^{8} \underset{[2]}{\times} X\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}&\left(32 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} \left(8 \underset{[2]}{\times} X\right)\\ &= \left(32 \underset{[2]}{-} 8\right) \underset{[2]}{\times} X\\ &= (32 \div 8) \underset{[2]}{\times} X = 4 \underset{[2]}{\times} X\end{aligned}$$
  - ◇ これを (II) で計算すると，
    $$\begin{aligned}&\left(32 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} \left(8 \underset{[2]}{\times} X\right)\\ &= \left(2^{5} \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} \left(2^{3} \underset{[2]}{\times} X\right)\\ &= \left(2^{5} \underset{[2]}{-} 2^{3}\right) \underset{[2]}{\times} X\\ &= 2^{5-3} \underset{[2]}{\times} X = 2^{2} \underset{[2]}{\times} X\end{aligned}$$

例 18　$\Bbbk = 2$ のとき，$X \in \mathbb{R}^{+}_{[2]}$ に対して

- $\left(5 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} \left(3 \underset{[2]}{\times} X\right)$
  $= \left(5 \underset{[2]}{+} 3\right) \underset{[2]}{\times} X$
  $= (5 \times 3) \underset{[2]}{\times} X = 15 \underset{[2]}{\times} X$
  - ◇ これを (II) で計算すると，
    $\left(5 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} \left(3 \underset{[2]}{\times} X\right)$
    $= \left(2^{\log_2 5} \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} \left(2^{\log_2 3} \underset{[2]}{\times} X\right)$
    $= \left(2^{\log_2 5} \underset{[2]}{+} 2^{\log_2 3}\right) \underset{[2]}{\times} X$
    $= 2^{\log_2 5 + \log_2 3} \underset{[2]}{\times} X$
    $= 2^{\log_2 15} \underset{[2]}{\times} X = 15 \underset{[2]}{\times} X$
- $\left(5 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} \left(3 \underset{[2]}{\times} X\right)$
  $= \left(5 \underset{[2]}{-} 3\right) \underset{[2]}{\times} X$
  $= (5 \div 3) \underset{[2]}{\times} X = \dfrac{5}{3} \underset{[2]}{\times} X$
  - ◇ これを (II) で計算すると，
    $\left(5 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} \left(3 \underset{[2]}{\times} X\right)$
    $= \left(2^{\log_2 5} \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} \left(2^{\log_2 3} \underset{[2]}{\times} X\right)$
    $= \left(2^{\log_2 5} \underset{[2]}{-} 2^{\log_2 3}\right) \underset{[2]}{\times} X$
    $= 2^{\log_2 5 - \log_2 3} \underset{[2]}{\times} X$
    $= 2^{\log_2 \frac{5}{3}} \underset{[2]}{\times} X = \dfrac{5}{3} \underset{[2]}{\times} X$

同類項の 和$_{[\Bbbk]}$，同類項の 差$_{[\Bbbk]}$ を求める際は，「乗法単位元$_{[\Bbbk]}$ が（1 ではなく）$\Bbbk$ であること」，すなわち「（$X = 1 \underset{[\Bbbk]}{\times} X$ ではなく(脚注 14)）$X = \Bbbk \underset{[\Bbbk]}{\times} X$ であること(脚注 15)」に，十分な注意が必要である。

間違えやすい同類項の計算 (I)

- $X \underset{[\Bbbk]}{+} \left(A \underset{[\Bbbk]}{\times} X\right) = \left(\Bbbk \underset{[\Bbbk]}{+} A\right) \underset{[\Bbbk]}{\times} X \left[= \Bbbk A \underset{[\Bbbk]}{\times} X \right]$
- $\left(A \underset{[\Bbbk]}{\times} X\right) \underset{[\Bbbk]}{+} X = \left(A \underset{[\Bbbk]}{+} \Bbbk\right) \underset{[\Bbbk]}{\times} X \left[= A\Bbbk \underset{[\Bbbk]}{\times} X \right]$
- $X \underset{[\Bbbk]}{-} \left(A \underset{[\Bbbk]}{\times} X\right) = \left(\Bbbk \underset{[\Bbbk]}{-} A\right) \underset{[\Bbbk]}{\times} X \left[= \dfrac{\Bbbk}{A} \underset{[\Bbbk]}{\times} X \right]$
- $\left(A \underset{[\Bbbk]}{\times} X\right) \underset{[\Bbbk]}{-} X = \left(A \underset{[\Bbbk]}{+} \Bbbk\right) \underset{[\Bbbk]}{\times} X \left[= \dfrac{A}{\Bbbk} \underset{[\Bbbk]}{\times} X \right]$

(脚注 14)　§ 2.2 で触れた通り，$\forall X \in \mathbb{R}^{+}_{[\Bbbk]}$ に対して $1 \underset{[\Bbbk]}{\times} X = 1$ である。

(脚注 15)　§ 6.1 で述べた「個数$_{[\Bbbk]}$ の数え方」によれば，X は（「X が 1 個」ではなく）「X が $\Bbbk$個$_{[\Bbbk]}$」である。

$A = \text{K}^a$（$a \in \mathbb{R}$）とすると，これは次のように書き換えられる；

間違えやすい同類項の計算 (II)

- $X \underset{[\text{K}]}{+} (\text{K}^a \underset{[\text{K}]}{\times} X) = \text{K}^{1+a} \underset{[\text{K}]}{\times} X$
- $(\text{K}^a \underset{[\text{K}]}{\times} X) \underset{[\text{K}]}{+} X = \text{K}^{a+1} \underset{[\text{K}]}{\times} X$
- $X \underset{[\text{K}]}{-} (\text{K}^a \underset{[\text{K}]}{\times} X) = \text{K}^{1-a} \underset{[\text{K}]}{\times} X$
- $(\text{K}^a \underset{[\text{K}]}{\times} X) \underset{[\text{K}]}{-} X = \text{K}^{a-1} \underset{[\text{K}]}{\times} X$

例 19　$\text{K} = 2$ のとき，$X \in \mathbb{R}^+_{[2]}$ に対して

- $$\begin{aligned} &\left(8 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} X \\ &= \left(8 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} \left(2 \underset{[2]}{\times} X\right) \\ &= \left(8 \underset{[2]}{+} 2\right) \underset{[2]}{\times} X \\ &= (8 \times 2) \underset{[2]}{\times} X = 16 \underset{[2]}{\times} X \end{aligned}$$

  ◇ これを (II) で計算すると，

  $$\begin{aligned} &\left(8 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} X \\ &= \left(2^3 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{+} \left(2^1 \underset{[2]}{\times} X\right) \\ &= \left(2^3 \underset{[2]}{+} 2^1\right) \underset{[2]}{\times} X \\ &= 2^{3+1} \underset{[2]}{\times} X = 2^4 \underset{[2]}{\times} X = 16 \underset{[2]}{\times} X \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\left(7 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} X \\ &= \left(7 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} \left(2 \underset{[2]}{\times} X\right) \\ &= \left(7 \underset{[2]}{-} 2\right) \underset{[2]}{\times} X \\ &= (7 \div 2) \underset{[2]}{\times} X = \frac{7}{2} \underset{[2]}{\times} X \end{aligned}$$

  ◇ これを (II) で計算すると，

  $$\begin{aligned} &\left(7 \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} X \\ &= \left(2^{\log_2 7} \underset{[2]}{\times} X\right) \underset{[2]}{-} \left(2^1 \underset{[2]}{\times} X\right) \\ &= \left(2^{\log_2 7} \underset{[2]}{-} 2^1\right) \underset{[2]}{\times} X \\ &= \left(2^{\log_2 7} \underset{[2]}{-} 2^{\log_2 2}\right) \underset{[2]}{\times} X \\ &= 2^{\log_2 7 - \log_2 2} \underset{[2]}{\times} X = 2^{\log_2 \frac{7}{2}} \underset{[2]}{\times} X = \frac{7}{2} \underset{[2]}{\times} X \end{aligned}$$

§ 7.2　K^n倍$_{[\mathrm{K}]}$

$A \in \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ とする。また，$\mathrm{K}^n \in \mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]}$（すなわち $n \in \mathbb{N}$）とする。

K^n倍$_{[\mathrm{K}]}$ の定義

K^n個$_{[\mathrm{K}]}$ の A の 和$_{[\mathrm{K}]}$

$$\overbrace{A \underset{[\mathrm{K}]}{+} A \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} A}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}}$$

を，「A の K^n倍$_{[\mathrm{K}]}$」という。

「A の K^n倍$_{[\mathrm{K}]}$」は，次のようになる；

K^n倍$_{[\mathrm{K}]}$(I)

$$\overbrace{A \underset{[\mathrm{K}]}{+} A \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} A}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = \overbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}^{n\text{ 個}} = A^n$$

$A = \mathrm{K}^a$ （$a \in \mathbb{R}$） とすると，これは次のように書き換えられる；

K^n倍$_{[\mathrm{K}]}$(II)

$$\overbrace{\mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^a}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = \overbrace{\mathrm{K}^a \cdot \mathrm{K}^a \cdot \cdots \cdot \mathrm{K}^a}^{n\text{ 個}} = (\mathrm{K}^a)^n = \mathrm{K}^{na}$$

また，「A の K^n倍$_{[\mathrm{K}]}$」を 乗法$_{[\mathrm{K}]}$ を用いて書き表すと，次のようになる；

K^n倍$_{[\mathrm{K}]}$(III)

$$\begin{aligned}\overbrace{A \underset{[\mathrm{K}]}{+} A \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} A}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}} &= \overbrace{\left(\mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\right) \underset{[\mathrm{K}]}{+} \left(\mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\right) \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} \left(\mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\right)}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}} \\ &= (\overbrace{\mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}}) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \\ &= \mathrm{K}^n \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\end{aligned}$$

(III) の結果に $A = \mathrm{K}^a$ を代入したものは，(II) の結果と一致している(脚注 16)。

(脚注 16)　$\mathrm{K}^n \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A = \mathrm{K}^n \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^a = \mathrm{K}^{na}$

例 20

- $\overbrace{16 \underset{[\mathrm{K}]}{+} 16 \underset{[\mathrm{K}]}{+} 16}^{\mathrm{K}^3\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = \overbrace{16 \cdot 16 \cdot 16}^{3\text{ 個}} = 16^3$ より，16 の K^3倍$_{[\mathrm{K}]}$ は 16^3 である。
  - ◇ $\mathrm{K} = 2$ のとき，$16 = 2^4$ として，これを (II) のように計算すると，

    $$\overbrace{2^4 \underset{[2]}{+} 2^4 \underset{[2]}{+} 2^4}^{2^3\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = 2^{\overbrace{4+4+4}^{3\text{ 個}}} = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$$

  - ◇ $\mathrm{K} = 2$ のとき，これを (III) のように計算すると，

    $$\overbrace{16 \underset{[2]}{+} 16 \underset{[2]}{+} 16}^{2^3\text{個}_{[2]}} = 2^3 \underset{[2]}{\times} 16 \left[= 2^3 \underset{[2]}{\times} 2^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12} \right]$$

  - ◇ $\mathrm{K} = 5$ のとき，これを (III) のように計算すると，

    $$\overbrace{16 \underset{[5]}{+} 16 \underset{[3]}{+} 16}^{5^3\text{個}_{[5]}} = 5^3 \underset{[5]}{\times} 16 \left[= 5^3 \underset{[5]}{\times} 5^{\log_5 16} = 5^{3\log_5 16} = \left(5^{\log_5 16}\right)^3 = 16^3 \right]$$

  - ◇ $\mathrm{K} = \pi$ のとき，これを (III) のように計算すると，

    $$\overbrace{16 \underset{[\pi]}{+} 16 \underset{[3]}{+} 16}^{\pi^3\text{個}_{[\pi]}} = \pi^3 \underset{[\pi]}{\times} 16 \left[= \pi^3 \underset{[\pi]}{\times} \pi^{\log_\pi 16} = \pi^{3\log_\pi 16} = \left(\pi^{\log_\pi 16}\right)^3 = 16^3 \right]$$

§ 7.3　K^n等分$_{[\mathrm{K}]}$

$A, X \in \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ とする。また，$\mathrm{K}^n \in \mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]}$（すなわち $n \in \mathbb{N}$）とする。

K^n等分$_{[\mathrm{K}]}$ の定義

K^n個$_{[\mathrm{K}]}$ の X の 和$_{[\mathrm{K}]}$ が A に等しいとき，すなわち

$$\overbrace{X \underset{[\mathrm{K}]}{+} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} X}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = A$$

のとき，X を「A の K^n等分$_{[\mathrm{K}]}$」という。

「A の K^n等分$_{[\mathrm{K}]}$」は，次のようになる；

K^n等分$_{[\mathrm{K}]}$(I)

$$\begin{aligned} \overbrace{X \underset{[\mathrm{K}]}{+} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} X}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = A &\iff \overbrace{X \cdot X \cdot \cdots \cdot X}^{n\text{ 個}} = A \\ &\iff X^n = A \\ &\iff X = \sqrt[n]{A} \end{aligned}$$

$A = \mathrm{K}^a$（$a \in \mathbb{R}$）とすると，これは次のように書き換えられる；

$\mathbf{K}^n$等分$_{[\mathrm{K}]}$(II)

$$\overbrace{X \underset{[\mathrm{K}]}{+} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} X}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = \mathrm{K}^a \iff \overbrace{X \cdot X \cdot \cdots \cdot X}^{n\text{ 個}} = \mathrm{K}^a$$
$$\iff X^n = \mathrm{K}^a$$
$$\iff X = \sqrt[n]{\mathrm{K}^a}$$

また，「A の K^n等分$_{[\mathrm{K}]}$」を乗法 $\underset{[\mathrm{K}]}{\div}$ を用いて書き表すと，次のようになる；

$\mathbf{K}^n$等分$_{[\mathrm{K}]}$(III)

$$\overbrace{X \underset{[\mathrm{K}]}{+} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{+} X}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = A \iff \mathrm{K}^n \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X = A$$
$$\iff X = A \underset{[\mathrm{K}]}{\div} \mathrm{K}^n \left[= A \underset{[\mathrm{K}]}{/} \mathrm{K}^n \right]$$

(III) の結果に $A = \mathrm{K}^a$ を代入したものは，(II) の結果と一致している(脚注 17)。

例 21

- $\overbrace{4 \underset{[\mathrm{K}]}{+} 4 \underset{[\mathrm{K}]}{+} 4}^{\mathrm{K}^3\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = \overbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}^{3\text{ 個}} = 64$ より，64 の K^3等分$_{[\mathrm{K}]}$ は 4 である。
  - ◇ 64 の K^3等分$_{[\mathrm{K}]}$ を (I) を用いて求めると，$\sqrt[3]{64} = 4$
  - ◇ $\mathrm{K} = 2$ のとき，$64\left(= 2^6 \right)$ の 2^3等分$_{[\mathrm{K}]}$ を (II) を用いて求めると，
    $\sqrt[3]{2^6} = 2^{6 \cdot \frac{1}{3}} = 2^2$
  - ◇ $\mathrm{K} = 2$ のとき，64 の 2^3等分$_{[\mathrm{K}]}$ を (III) を用いて求めると，
    $64 \underset{[2]}{/} 2^3 \left[= 2^6 \underset{[2]}{\div} 2^3 = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 \right]$
  - ◇ $\mathrm{K} = 5$ のとき，64 の 5^3等分$_{[\mathrm{K}]}$ を (III) を用いて求めると，
    $64 \underset{[5]}{/} 5^3 \left[= 5^{\log_5 64} \underset{[5]}{\div} 5^3 = 5^{\frac{6 \log_5 2}{3}} = 5^{2 \log_5 2} = (5^{\log_5 2})^2 = 2^2 \right]$
  - ◇ $\mathrm{K} = \pi$ のとき，64 の π^3等分$_{[\mathrm{K}]}$ を (III) を用いて求めると，
    $64 \underset{[\pi]}{/} \pi^3 \left[= \pi^{\log_\pi 64} \underset{[\pi]}{\div} \pi^3 = \pi^{\frac{6 \log_\pi 2}{3}} = \pi^{2 \log_\pi 2} = (\pi^{\log_\pi 2})^2 = 2^2 \right]$

(脚注 17) $A \underset{[\mathrm{K}]}{\div} \mathrm{K}^n = \mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{\div} \mathrm{K}^n = \mathrm{K}^{\frac{a}{n}}$

§8　乗法$_{[K]}$ の法則

§8.1　K^n乗$_{[K]}$

実数体 $\mathbb{R}$ において，「n 個の数 a の 積$_{[K]}$」を「a^n」と表記して「a の n 乗」と読む。これに倣い，$\mathbb{R}^+_{[K]}$ における「A の K^n乗$_{[K]}$」を，次のように定める；

$A \in \mathbb{R}^+_{[K]}$ とする。また，$K^n \in \mathbb{N}^+_{[K]}$（すなわち $n \in \mathbb{N}$）とする。

K^n乗$_{[K]}$ の定義

K^n個$_{[K]}$ の A の 積$_{[K]}$

$$\overbrace{A \underset{[K]}{\times} A \underset{[K]}{\times} \cdots \underset{[K]}{\times} A}^{K^n\text{個}_{[K]}}$$

を，「A の K^n乗$_{[K]}$」といい，$A^{[K]\,K^n}$ と表記する；

$$A^{[K]\,K^n} := \overbrace{A \underset{[K]}{\times} A \underset{[K]}{\times} \cdots \underset{[K]}{\times} A}^{K^n\text{個}_{[K]}}$$

乗法$_{[K]}$ の定義から，次の式が成り立つ；

K^n乗$_{[K]}$(I)

$$A^{[K]\,K^n} = K^{\overbrace{(\log_K A)\cdot(\log_K A)\cdot\cdots\cdot(\log_K A)}^{n\ \text{個}}} = K^{(\log_K A)^n}$$

$A = K^a$（$a \in \mathbb{R}$）とすると，これは次のように書き換えられる；

K^n乗$_{[K]}$(II)

$$(K^a)^{[K]\,K^n} = K^{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\ \text{個}}} = K^{a^n}$$

例 22　$K = 2$ のとき，

- $8^{[2]\,2^4} = \overbrace{8 \underset{[2]}{\times} 8 \underset{[2]}{\times} 8 \underset{[2]}{\times} 8}^{2^4\text{個}_{[2]}} = 2^{\overbrace{(\log_2 8)\cdot(\log_2 8)\cdot(\log_2 8)\cdot(\log_2 8)}^{4\ \text{個}}} = 2^{\overbrace{3\cdot3\cdot3\cdot3}^{4\ \text{個}}} = 2^{3^4} = 2^{81}$
  - ◇　これを，(II) のように計算すると，

$$\left(2^3\right)^{[2]\,2^4} = \overbrace{2^3 \underset{[2]}{\times} 2^3 \underset{[2]}{\times} 2^3 \underset{[2]}{\times} 2^3}^{2^4\text{個}_{[2]}} = 2^{\overbrace{3\cdot3\cdot3\cdot3}^{4\ \text{個}}} = 2^{3^4} = 2^{81}$$

§ 8.2　K^n乗根$_{[\mathrm{K}]}$

実数体 $\mathbb{R}$ において，$a \geqq 0$，$x \geqq 0$，$n \in \mathbb{N}$ のとき，方程式 $x^n = a$ の解を「$\sqrt[n]{a}$」と表記して「a の n 乗根」と読む。これに倣い，$\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ における「A の K^n乗根$_{[\mathrm{K}]}$」を，次のように定める。

K^n乗根$_{[\mathrm{K}]}$ の定義

$\underline{A \underset{[\mathrm{K}]}{\geqq} 1, X \underset{[\mathrm{K}]}{\geqq} 1}$とする。また，$\underline{\mathrm{K}^n \in \mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]}\text{（すなわち } n \in \mathbb{N}\text{）とする。}}$

$X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n}\left[= \overbrace{X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \cdots \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X}^{\mathrm{K}^n\text{個}_{[\mathrm{K}]}}\right]$ が A に等しいとき，すなわち

$$X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n} = A$$

を満たすとき，X を「A の K^n乗根$_{[\mathrm{K}]}$」といい，$\sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n}]{A}$ と表記する。

「A の K^n乗根$_{[\mathrm{K}]}$」は，次のようになる；

K^n乗根$_{[\mathrm{K}]}$(I)

$$\begin{aligned} X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n} = A &\iff \mathrm{K}^{(\log_{\mathrm{K}} X)^n} = \mathrm{K}^{\log_{\mathrm{K}} A} \\ &\iff (\log_{\mathrm{K}} X)^n = \log_{\mathrm{K}} A \\ &\iff \log_{\mathrm{K}} X = \sqrt[n]{\log_{\mathrm{K}} A} \\ &\iff X = \mathrm{K}^{\sqrt[n]{\log_{\mathrm{K}} A}} \end{aligned}$$

であるから，

$$\sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n}]{A} = \mathrm{K}^{\sqrt[n]{\log_{\mathrm{K}} A}}$$

$A = \mathrm{K}^a$（$a \in \mathbb{R}$） とすると，これは次のように書き換えられる；

K^n乗根$_{[\mathrm{K}]}$(II)

$$\begin{aligned} X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n} = \mathrm{K}^a &\iff \mathrm{K}^{(\log_{\mathrm{K}} X)^n} = \mathrm{K}^a \\ &\iff (\log_{\mathrm{K}} X)^n = a \\ &\iff \log_{\mathrm{K}} X = \sqrt[n]{a} \\ &\iff X = \mathrm{K}^{\sqrt[n]{a}} \end{aligned}$$

であるから，

$$\sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n}]{\mathrm{K}^a} = \mathrm{K}^{\sqrt[n]{a}}$$

$\boxed{\text{例 } \mathbf{23}}$ $\mathbb{K}=2$ のとき，

- $\overbrace{4 \underset{[2]}{\times} 4 \underset{[2]}{\times} 4}^{2^3\text{個}_{[2]}} = \overbrace{2^2 \underset{[2]}{\times} 2^2 \underset{[2]}{\times} 2^2}^{2^3\text{個}_{[2]}} = 2^{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2}^{3\text{ 個}}} = 2^8 = 256$ より，256 の 2^3乗根$_{[2]}$ は 4 である。
  - ◇ 256 の 2^3乗根$_{[2]}$ を (I) を用いて求めると，
    $\sqrt[{}^{[2]}2^3]{256} = 2^{\sqrt[3]{\log_2 256}} = 2^{\sqrt[3]{8}} = 2^2 = 4$
  - ◇ 256 の 2^3乗根$_{[2]}$ を (II) を用いて求めると，
    $\sqrt[{}^{[2]}2^3]{2^8} = 2^{\sqrt[3]{8}} = 2^2 = 4$

$\underline{A \underset{[\mathbb{K}]}{\geqq} 1,\ B \underset{[\mathbb{K}]}{\geqq} 1 \text{ のとき}}$(脚注 18)，次の等式が成り立つ。

$\mathbb{K}^n$乗根$_{[\mathbb{K}]}$ の 積$_{[\mathbb{K}]}$

$\underline{A \underset{[\mathbb{K}]}{\geqq} 1,\ B \underset{[\mathbb{K}]}{\geqq} 1 \text{ のとき，}}$

$$\sqrt[{}^{[\mathbb{K}]}\mathbb{K}^n]{A} \underset{[\mathbb{K}]}{\times} \sqrt[{}^{[\mathbb{K}]}\mathbb{K}^n]{B} = \sqrt[{}^{[\mathbb{K}]}\mathbb{K}^n]{A \underset{[\mathbb{K}]}{\times} B}$$

(脚注 18) これは，通常の累乗根の等式 $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ が成り立つための十分条件である「a≧0，b≧0」に対応する。

§ 8.3　乗法公式$_{[\mathrm{K}]}$

本節では，このあと § 9.2 で用いる公式のみ述べる(脚注 19)。

乗法公式$_{[\mathrm{K}]}$

$\forall A.\ B \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ に対して，次の等式が成り立つ；

$$(A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} = A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} B \underset{[\mathrm{K}]}{+} B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}$$

この等式を，2 通りの方法で証明しておく(脚注 20)。

証明その 1　分配法則(脚注 21)および同類項の計算(脚注 22)より，

$$\begin{aligned}
(A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} &= (A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} (A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B) \\
&= A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} (A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B) \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\times} (A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B) \\
&= A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} B \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \\
&= A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} B \underset{[\mathrm{K}]}{+} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} B \underset{[\mathrm{K}]}{+} B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \\
&= A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} B \underset{[\mathrm{K}]}{+} B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}
\end{aligned}$$

（証明終）

証明その 2　$A = \mathrm{K}^a$，$B = \mathrm{K}^b$（$a, b \in \mathbb{R}$）とすると，

$$\begin{aligned}
(A \underset{[\mathrm{K}]}{+} B)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} &= (\mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^b)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \\
&= (\mathrm{K}^{a+b})^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \\
&= \mathrm{K}^{(a+b)^2} \\
&= \mathrm{K}^{a^2+2ab+b^2} \\
&= \mathrm{K}^{a^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^{2ab} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^{b^2} \\
&= (\mathrm{K}^a)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^b \underset{[\mathrm{K}]}{+} (\mathrm{K}^b)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \\
&= A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} B \underset{[\mathrm{K}]}{+} B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}
\end{aligned}$$

（証明終）

(脚注 19)　この 乗法公式$_{[\mathrm{K}]}$ は，$\mathbb{R}$ における $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ に対応するものである。

(脚注 20)　「証明その 1」の方が平易だが，$\mathbb{R}$ における $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ との関わりを見るために，「証明その 2」も並記した。

(脚注 21)　§ 2.1 の III を参照。

(脚注 22)　§ 7.1 を参照。

§ 9　$\mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ における方程式の解法

§ 9.1　K 次$_{[\mathrm{K}]}$ 方程式

$A, B, X \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ のとき，K 次$_{[\mathrm{K}]}$ 方程式[脚注 23]

$$A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} B = 1$$

を考える。これは，次のように解くことができる；

$$\begin{aligned} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} B = 1 &\iff A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X = \underset{[\mathrm{K}]}{-}B \\ &\iff X = \underset{[\mathrm{K}]}{-}B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} A \end{aligned}$$

すなわち，方程式 $A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} B = 1$ の解は $X = \underset{[\mathrm{K}]}{-}B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} A$ である。

ここで，$A = \mathrm{K}^{a}$，$B = \mathrm{K}^{b}$，$X = \mathrm{K}^{x}$（$a, b, x \in \mathbb{R}$）とすると，$A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} B = 1$ は

$$\mathrm{K}^{ax+b} = 1$$

と書くことができ，また

$$\underset{[\mathrm{K}]}{-}B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} A = \underset{[\mathrm{K}]}{-}\mathrm{K}^{b} \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} \mathrm{K}^{a} = \mathrm{K}^{-b} \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} \mathrm{K}^{a} = \mathrm{K}^{-\frac{b}{a}}$$

であるから，次のことが言える；

> 方程式 $\mathrm{K}^{ax+b} = 1$ を K^{x} について解くと，
>
> $$\mathrm{K}^{x} = \mathrm{K}^{-\frac{b}{a}}$$

§ 9.2　K^{2} 次$_{[\mathrm{K}]}$ 方程式

$A, B, C, X \in \mathbb{R}^{+}_{[\mathrm{K}]}$ のとき，K^{2} 次$_{[\mathrm{K}]}$ 方程式[脚注 23]

$$A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{2}} \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} C = 1$$

を考える[脚注 24]。これは，$\underline{B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{2}} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^{4} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C \underset{[\mathrm{K}]}{\geqq} 1}$ <u>のとき</u>[脚注 25]，§ 8.3 の 乗法公式$_{[\mathrm{K}]}$ を利用して，次のように解くことができる；

(脚注 23) 「K 次$_{[\mathrm{K}]}$ 方程式」は通常の「1 次方程式（linear equation）」，「K^{2} 次$_{[\mathrm{K}]}$ 方程式」は通常の「2 次方程式（quadratic equation）」に対応している。

(脚注 24) これは，本稿「はじめに」の方程式②である。この方程式を解くことは，本稿の目的のひとつである。

(脚注 25) 本稿において，K^{n} 乗根$_{[\mathrm{K}]}$ は 1 以上$_{[\mathrm{K}]}$ の数に対してしか定義していないため，このあとの式変形をするためにはこの条件が必要となる。見てわかる通り，これは，実数における 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の「判別式 $b^2 - 4ac \geqq 0$ のとき」に対応している。

$$
\begin{aligned}
&A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} C = 1\\
&\iff A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \left(X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X\right) = \underset{[\mathrm{K}]}{-} C\\
&\iff A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \left(X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \left(B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\right)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}\right) = A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \left(B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\right)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} C\\
&\iff A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \left(X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} \mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} \left(B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\right)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}\right) = B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A) \underset{[\mathrm{K}]}{-} C\\
&\iff A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \left(X \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\right)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} = (B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\\
&\iff \left(X \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\right)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} = (B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2})\\
&\iff X \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A) = \underset{[\mathrm{K}]}{\pm} \sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}]{(B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2})}\\
&\iff X \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A) = \left(\underset{[\mathrm{K}]}{\pm} \sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}]{B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C}\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\\
&\iff X = \left(\underset{[\mathrm{K}]}{-} B \underset{[\mathrm{K}]}{\pm} \sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}]{B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C}\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)
\end{aligned}
$$

すなわち，方程式 $A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} C = 1$（ただし $B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C \underset{[\mathrm{K}]}{\geqq} 1$）の解は，

$$X = \left(\underset{[\mathrm{K}]}{-} B \underset{[\mathrm{K}]}{\pm} \sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}]{B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C}\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)$$

である。

ここで，$A = \mathrm{K}^a$，$B = \mathrm{K}^b$，$C = \mathrm{K}^c$，$X = \mathrm{K}^x$（$a, b, c, x \in \mathbb{R}$）とすると，$A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{+} B \underset{[\mathrm{K}]}{\times} X \underset{[\mathrm{K}]}{+} C = 1$（ただし $B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C \underset{[\mathrm{K}]}{\geqq} 1$）は

$$\mathrm{K}^{ax^2+bx+c} = 1 \quad （ただし\ b^2 - 4ac \geqq 0）$$

と書くことができ，また

$$
\begin{aligned}
&\left(\underset{[\mathrm{K}]}{-} B \underset{[\mathrm{K}]}{\pm} \sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}]{B^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} C}\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\\
&= \left(\underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^b \underset{[\mathrm{K}]}{\pm} \sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}]{(\mathrm{K}^b)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{-} \mathrm{K}^4 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^a \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^c}\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} (\mathrm{K}^2 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \mathrm{K}^a)\\
&= \left(\mathrm{K}^{-b} \underset{[\mathrm{K}]}{\pm} \sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}]{\mathrm{K}^{b^2-4ac}}\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} \mathrm{K}^{2a}\\
&= \left(\mathrm{K}^{-b} \underset{[\mathrm{K}]}{\pm} \mathrm{K}^{\sqrt{b^2-4ac}}\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\diagup} \mathrm{K}^{2a} = \mathrm{K}^{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}
\end{aligned}
$$

であるから，次のことが言える；

方程式 $\mathrm{K}^{ax^2+bx+c} = 1$（ただし $b^2 - 4ac \geqq 0$）を K^x について解くと，

$$\mathrm{K}^x = \mathrm{K}^{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

§ 10　指数$_{[\mathrm{K}]}$ と 対数$_{[\mathrm{K}]}$

§ 10.1　指数$_{[\mathrm{K}]}$ の拡張

$A \in \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ であるとき，$\forall M, N \in \mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]}$ に対して，次の「指数法則$_{[\mathrm{K}]}$」が成り立つ。

自然数$_{[\mathrm{K}]}$乗$_{[\mathrm{K}]}$ に関する 指数法則$_{[\mathrm{K}]}$(I)

$A \in \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ であるとき，$\forall M, N \in \mathbb{N}^+_{[\mathrm{K}]}$ に対して

- $A^{[\mathrm{K}]\,M} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A^{[\mathrm{K}]\,N} = A^{[\mathrm{K}]\,M \underset{[\mathrm{K}]}{+} N}$
- $\left(A^{[\mathrm{K}]\,M}\right)^{[\mathrm{K}]\,N} = A^{[\mathrm{K}]\,M \underset{[\mathrm{K}]}{\times} N}$

これは，$M = \mathrm{K}^m, N = \mathrm{K}^n$（$m, n \in \mathbb{N}$）とすると，次のように書き換えることができる；

自然数$_{[\mathrm{K}]}$乗$_{[\mathrm{K}]}$ に関する 指数法則$_{[\mathrm{K}]}$(II)

$A \in \mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ であるとき，$\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して

- $A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^m} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n} = A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{m+n}}$
- $\left(A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^m}\right)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^n} = A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{mn}}$

例 24

- $A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^3} = \overbrace{\left(A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\right)}^{\mathrm{K}^2\text{個}_{[\mathrm{K}]}} \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \overbrace{\left(A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\right)}^{\mathrm{K}^3\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = \overbrace{A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A}^{\mathrm{K}^5\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^5}$
- $\left(A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^2}\right)^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^3} = \overbrace{\left(A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \left(A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\right) \underset{[\mathrm{K}]}{\times} \left(A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A\right)}^{(A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A)\text{ が }\mathrm{K}^3\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = \overbrace{A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A \underset{[\mathrm{K}]}{\times} A}^{\mathrm{K}^6\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^6}$

次に，A が 正$_{[\mathrm{K}]}$ の数であるとき，「A の K^n乗$_{[\mathrm{K}]}$」の定義を次のように拡張する(脚注 26)。

指数$_{[\mathrm{K}]}$ の定義の拡張　その 1（1乗$_{[\mathrm{K}]}$）

A は 正$_{[\mathrm{K}]}$ の数とする。

- 「A の 1 乗$_{[\mathrm{K}]}$」を，「$\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ の 乗法単位元$_{[\mathrm{K}]}$」として定義する。すなわち

$$A^{[\mathrm{K}]\,1} := \mathrm{K}$$

(脚注 26)　以下の拡張（その 1〜その 4）は，$a > 0$ に対する通常の指数 a^0，a^{-n}（$n \in \mathbb{N}$），$a^{\frac{m}{n}}$（$m \in \mathbb{Z}$，$n \in \mathbb{N}$），a^x（$x \in \mathbb{R}$）を定義する方法とまったく同様である。

指数$_{[\mathrm{K}]}$ の定義の拡張　その 2（負$_{[\mathrm{K}]}$ の 整数$_{[\mathrm{K}]}$乗$_{[\mathrm{K}]}$）

A は 正$_{[\mathrm{K}]}$ の数とする。

- 負$_{[\mathrm{K}]}$ の 整数$_{[\mathrm{K}]}$ である数 $\underset{[\mathrm{K}]}{-}N$ （$N \in \mathbb{N}^{+}_{[\mathrm{K}]}$）に対して，
  「A の $\underset{[\mathrm{K}]}{-}N$ 乗$_{[\mathrm{K}]}$」を，「A の N 乗$_{[\mathrm{K}]}$ の 乗法逆元$_{[\mathrm{K}]}$（逆数$_{[\mathrm{K}]}$）」として定義する。

$$A^{[\mathrm{K}]\underset{[\mathrm{K}]}{-}N} := \mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{/} A^{[\mathrm{K}]\,N}$$

◇ $N = \mathrm{K}^{n}$（$n \in \mathbb{N}$）とすると，この定義は次のように言い換えることもできる；

$$A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{-n}} := \mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{/} A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{n}} \left[= \mathrm{K} \underset{[\mathrm{K}]}{/} \mathrm{K}^{(\log_{\mathrm{K}} A)^{n}} = \mathrm{K}^{\frac{1}{(\log_{\mathrm{K}} A)^{n}}} \right]$$

例 25 $16^{[\mathrm{K}]\underset{[\mathrm{K}]}{-}\mathrm{K}^{3}}$ は，$16^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{3}}\left[= \overbrace{16 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} 16 \underset{[\mathrm{K}]}{\times} 16}^{\mathrm{K}^{3}\text{個}_{[\mathrm{K}]}} = \mathrm{K}^{\overbrace{\log_{\mathrm{K}} 16 \cdot \log_{\mathrm{K}} 16 \cdot \log_{\mathrm{K}} 16}^{3\text{ 個}}} = \mathrm{K}^{(\log_{\mathrm{K}} 16)^{3}} \right]$ の
乗法逆元$_{[\mathrm{K}]}$（逆数$_{[\mathrm{K}]}$）である。

- $\mathrm{K} = 2$ のとき，
  $16^{[2]\,2^{3}} = 2^{(\log_{2} 16)^{3}} = 2^{4^{3}} = 2^{64}$ であるから，
  $16^{[2]\underset{[2]}{-}2^{3}}$ はその 乗法逆元$_{[2]}$（逆数$_{[2]}$）で，$16^{[2]\underset{[2]}{-}2^{3}} = 2 \underset{[2]}{/} 16^{[2]\,2^{3}} = 2 \underset{[2]}{/} 2^{64} = 2^{\frac{1}{64}}$
- $\mathrm{K} = 4$ のとき，
  $16^{[4]\,4^{3}} = 4^{(\log_{4} 16)^{3}} = 4^{2^{3}} = 4^{8}$ であるから，
  $16^{[4]\underset{[4]}{-}4^{3}}$ はその 乗法逆元$_{[2]}$（逆数$_{[2]}$）で，$16^{[4]\underset{[4]}{-}4^{3}} = 4 \underset{[4]}{/} 16^{[4]\,4^{3}} = 4 \underset{[4]}{/} 4^{8} = 4^{\frac{1}{8}}$

指数$_{[\mathrm{K}]}$ の定義の拡張　その 3（有理数$_{[\mathrm{K}]}$乗$_{[\mathrm{K}]}$）

A は 正$_{[\mathrm{K}]}$ の数とする。

- 有理数$_{[\mathrm{K}]}$ である数 $M \underset{[\mathrm{K}]}{/} N$ （$M \in \mathbb{Z}^{+}_{[\mathrm{K}]}, N \in \mathbb{N}^{+}_{[\mathrm{K}]}$）に対して，
  「A の $M \underset{[\mathrm{K}]}{/} N$ 乗$_{[\mathrm{K}]}$」を，「A の M 乗$_{[\mathrm{K}]}$ の N 乗根$_{[\mathrm{K}]}$」として定義する。すなわち

$$A^{[\mathrm{K}]\,M \underset{[\mathrm{K}]}{/} N} := \sqrt[{[\mathrm{K}]\,N}]{A^{[\mathrm{K}]\,M}}$$

◇ $M = \mathrm{K}^{m}$，$N = \mathrm{K}^{n}$ （$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$）とすると，除法の定義より $\mathrm{K}^{m} \underset{[\mathrm{K}]}{/} \mathrm{K}^{n} = \mathrm{K}^{\frac{m}{n}}$
  であるから，この定義は次のように言い換えることもできる；

$$A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{m/n}} := \sqrt[{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{n}}]{A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{m}}}$$

◇ $A^{[\mathrm{K}]\underset{[\mathrm{K}]}{-}M \underset{[\mathrm{K}]}{/} N}\left[= A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{-m/n}} \right]$ は, $A^{[\mathrm{K}]\,M \underset{[\mathrm{K}]}{/} N}\left[= A^{[\mathrm{K}]\,\mathrm{K}^{m/n}} \right]$ の 乗法逆元$_{[\mathrm{K}]}$（逆数$_{[\mathrm{K}]}$）である。

例 26 $256^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^{2/3}}$ は，256 の $\mathbb{K}^2$乗$_{[\mathbb{K}]}$ の $\mathbb{K}^3$乗根$_{[\mathbb{K}]}$ である。
また，$256^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^{-2/3}}$ は，$256^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^{2/3}}$ の 乗法逆元$_{[2]}$（逆数$_{[2]}$）である。

- $\mathbb{K}=2$ のとき，$256^{[2]\,2^2} = 256 \underset{[2]}{\times} 256 = 2^8 \underset{[2]}{\times} 2^8 = 2^{64}$ であるから，
  $256^{[2]\,2^{2/3}} = {}^{[2]\,2^3}\!\sqrt{256^{[2]\,2^2}} = {}^{[2]\,2^3}\!\sqrt{2^{64}} = 2^{\sqrt[3]{64}} = 2^4$
  また，$256^{[2]\,2^{-2/3}}$ は $256^{[2]\,2^{2/3}}$ の 乗法逆元$_{[2]}$（逆数$_{[2]}$）であり，$256^{[2]\,2^{-2/3}} = 2^{\frac{1}{4}}$
- $\mathbb{K}=4$ のとき，$256^{[4]\,4^2} = 256 \underset{[4]}{\times} 256 = 4^4 \underset{[4]}{\times} 4^4 = 4^{16}$ であるから，
  $256^{[4]\,4^{2/3}} = {}^{[4]\,4^3}\!\sqrt{256^{[4]\,4^2}} = {}^{[4]\,4^3}\!\sqrt{4^{16}} = 4^{\sqrt[3]{16}}$
  また，$256^{[4]\,4^{-2/3}}$ は $256^{[4]\,4^{2/3}}$ の 乗法逆元$_{[2]}$（逆数$_{[2]}$）であり，$256^{[4]\,4^{-2/3}} = 4^{\frac{1}{\sqrt[3]{16}}}$

指数$_{[\mathbb{K}]}$ の定義の拡張　その 4（無理数$_{[\mathbb{K}]}$乗$_{[\mathbb{K}]}$）

A は 正$_{[\mathbb{K}]}$ の数とする。

- 無理数$_{[\mathbb{K}]}$ である数 X に対して，X に収束する無限有理数列 $\{X_n\}$（$X_n \in \mathbb{Q}^+_{[\mathbb{K}]}$）を一つ定めるとき，$A^{[\mathbb{K}]\,X}$ を，数列 $\left\{A^{[\mathbb{K}]\,X_n}\right\}$ の極限として定義する。すなわち，

$$A^{[\mathbb{K}]\,X} := \lim_{n\to\infty} A^{[\mathbb{K}]\,X_n}$$

◇ $X = \mathbb{K}^x$（$x \in \mathbb{R}$ は無理数）とし，x に収束する無限有理数列 $\{x_n\}$（$x_n \in \mathbb{Q}$）を一つ定めるとき，この定義は次のように言い換えることもできる；

$$A^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^x} := \lim_{n\to\infty} A^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^{x_n}}$$

整数$_{[\mathbb{K}]}$乗$_{[\mathbb{K}]}$，有理数$_{[\mathbb{K}]}$乗$_{[\mathbb{K}]}$，無理数$_{[\mathbb{K}]}$乗$_{[\mathbb{K}]}$ を以上のように定義すると，前述の 指数法則$_{[\mathbb{K}]}$ がすべて保たれる。

指数法則$_{[\mathbb{K}]}$ の拡張 (I)

A が 正$_{[\mathbb{K}]}$ の数であるとき，$\forall M, N \in \mathbb{R}^+_{[\mathbb{K}]}$ に対して

- $A^{[\mathbb{K}]\,M} \underset{[\mathbb{K}]}{\times} A^{[\mathbb{K}]\,N} = A^{[\mathbb{K}]\,M \underset{[\mathbb{K}]}{+} N}$
- $\left(A^{[\mathbb{K}]\,M}\right)^{[\mathbb{K}]\,N} = A^{[\mathbb{K}]\,M \underset{[\mathbb{K}]}{\times} N}$

指数法則$_{[\mathbb{K}]}$ の拡張 (II)

A が 正$_{[\mathbb{K}]}$ の数であるとき，$\forall m, n \in \mathbb{R}$ に対して

- $A^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^m} \underset{[\mathbb{K}]}{\times} A^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^n} = A^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^{m+n}}$
- $\left(A^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^m}\right)^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^n} = A^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^{mn}}$

§ 10.2　対数$_{[\mathbb{K}]}$

実数体 $\mathbb{R}$ においては，$\underline{a > 0,\ a \neq 1,\ m > 0}$ に対して，$m = a^r$ を r について解いた式を $r = \log_a m$ と書き，この値 r を，a を底とする m の対数という。

これに倣い，体 $\mathbb{R}^+_{[\mathbb{K}]}$ においても，$\underline{A \underset{[\mathbb{K}]}{>} 1,\ A \neq \mathbb{K},\ M \underset{[\mathbb{K}]}{>} 1}$ に対して，$M = A^{[\mathbb{K}]\,R}$ を R について解いた式を，次のように定める；

対数$_{[\mathbb{K}]}$ の定義 (I)

$\underline{A \underset{[\mathbb{K}]}{>} 1,\ A \neq \mathbb{K},\ M \underset{[\mathbb{K}]}{>} 1}$ であるとき，

$$M = A^{[\mathbb{K}]\,R}$$

を満たす $R \in \mathbb{R}^+_{[\mathbb{K}]}$ が存在する。この値 R を，A を底とする M の 対数$_{[\mathbb{K}]}$ といい，

$$R = \log_{[\mathbb{K}]\,A} M$$

と書く。

例 27

- $\mathbb{K} = 2$ のとき，
  $16^{[2]\,2\sqrt{2}} = 16^{[2]\,2^{3/2}} = 2^{(\log_2 16)^{3/2}} = 2^{4^{3/2}} = 2^8 = 256$ であるから，
  $\log_{[2]\,16} 256 = 2\sqrt{2}$
- $\mathbb{K} = 4$ のとき，
  $16^{[4]\,16} = 16^{[4]\,4^2} = 4^{(\log_4 16)^2} = 4^{2^2} = 4^4 = 256$ であるから，
  $\log_{[4]\,16} 256 = 16$

対数$_{[\mathbb{K}]}$ の定義 (I) において，$A = \mathbb{K}^a$（$a > 0,\ a \neq 1$），$M = \mathbb{K}^m$（$m > 0$）とおき，さらに $R = \mathbb{K}^r$（$r \in \mathbb{R}$）とおくと，

$$\begin{aligned} M = A^{[\mathbb{K}]\,R} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{K}^m = (\mathbb{K}^a)^{[\mathbb{K}]\,\mathbb{K}^r} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{K}^m = \mathbb{K}^{a^r} \\ &\Longleftrightarrow \quad m = a^r \\ &\Longleftrightarrow \quad r = \log_a m \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{K}^r = \mathbb{K}^{\log_a m} \\ &\Longleftrightarrow \quad R = \mathbb{K}^{\log_a m} \end{aligned}$$

であるから，次のことが言える；

対数$_{[\Bbbk]}$ の定義 (II)

$a > 0$，$a \neq 1$，$m > 0$ のとき，

$$\log_{[\Bbbk]\,\Bbbk^a} \Bbbk^m = \Bbbk^{\log_a m}$$

例 28

- $\Bbbk = 2$ のとき，
  $\log_{[2]\,16} 256 = \log_{[2]\,2^4} 2^8 = 2^{\log_4 8} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$
- $\Bbbk = 4$ のとき，
  $\log_{[4]\,16} 256 = \log_{[4]\,4^2} 4^4 = 4^{\log_2 4} = 4^2 = 16$

※ これらの結果を，例 27 と比較してみよ。

対数$_{[\Bbbk]}$ の性質

- $\log_{[\Bbbk]\,A} (M \underset{[\Bbbk]}{\times} N) = \log_{[\Bbbk]\,A} M \underset{[\Bbbk]}{+} \log_{[\Bbbk]\,A} N$
- $\log_{[\Bbbk]\,A} M^{[\Bbbk]\,N} = N \underset{[\Bbbk]}{\times} \log_{[\Bbbk]\,A} M$

証明

$A = \Bbbk^a$（$a > 0$，$a \neq 1$），$M = \Bbbk^m$（$m > 0$），$N = \Bbbk^n$（$n > 0$）とすると，

- $\log_{[\Bbbk]\,\Bbbk^a} (\Bbbk^m \underset{[\Bbbk]}{\times} \Bbbk^n)$
  $= \log_{[\Bbbk]\,\Bbbk^a} \Bbbk^{mn} = \Bbbk^{\log_a mn} = \Bbbk^{\log_a m + \log_a n} = \Bbbk^{\log_a m} \underset{[\Bbbk]}{+} \Bbbk^{\log_a n} = \log_{[\Bbbk]\,\Bbbk^a} \Bbbk^m \underset{[\Bbbk]}{+} \log_{[\Bbbk]\,\Bbbk^a} \Bbbk^n$
- $\log_{[\Bbbk]\,\Bbbk^a} (\Bbbk^m)^{[\Bbbk]\,\Bbbk^n}$
  $= \log_{[\Bbbk]\,\Bbbk^a} \Bbbk^{m^n} = \Bbbk^{\log_a m^n} = \Bbbk^{n \cdot \log_a m} = \Bbbk^n \underset{[\Bbbk]}{\times} \Bbbk^{\log_a m} = \Bbbk^n \underset{[\Bbbk]}{\times} \log_{[\Bbbk]\,\Bbbk^a} \Bbbk^m$

（証明終）

あとがき

「方程式 $\mathrm{K}^{ax^2+bx+c} = 1$ を K^x について解く」という本稿の目的は，§ 9.2 でひとまず達成できた。しかしそこには，「$b^2 - 4ac \geqq 0$ の場合」という条件が付いている。

「$b^2 - 4ac < 0$ の場合」の解を求めるためには，体 $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ の代数的閉包を作ることが必要となるが，残念ながら，その考察を本稿に間に合わせることができなかった。

「体 $\mathbb{R}^+_{[\mathrm{K}]}$ の代数的閉包」については，また改めて記したいと考えている。

参考文献

特になし。