メネラウスの定理とチェバの定理

参拾萬数学工房

http://www.geocities.jp/osaqmath/

§ 1. 共線・共点

- 3 点が同一直線上にあることを，「**3 点は 共線 な位置にある**」，または単に「**3 点は 共線 である**」という。（この 3 点のことを **共線点** ということもある。）
- 3 直線が 1 点で交わることを，「**3 直線は 共点 な位置にある**」，または単に「**3 直線は 共点 である**」という。（この 3 直線のことを **共点線** ということもある。）

3 点が共線でないときは，「3 点は一般の位置にある」という。同様に，3 直線が共点でないときは，「3 直線は一般の位置にある」という。このことからもわかる通り，「3 点が共線である」ということは，3 点が特別な位置関係にあることを意味し，また，「3 直線が共点である」ということは，3 直線が特別な位置関係にあることを意味する。

重ねて強調しておくが，「共線」，「共点」はいずれも **位置関係** を表す用語である。くれぐれも，次のような **誤用** をしないように注意すること。

誤用例①　「3 点 A，B，C の共線を ℓ とする」 → **この表現は誤り**

誤用例②　「3 直線 ℓ，m，n の共点を P とする」 → **この表現は誤り**

- **「メネラウスの定理」は，「共線」に関する定理である。**
- **「チェバの定理」は，「共点」に関する定理である。**

§ 2.　メネラウスの定理

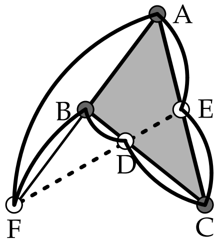
メネラウスの定理

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の 内分点 または 外分点 とするとき，**3 点 D，E，F が共線であるならば**，等式

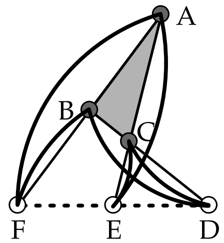
$$\frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{FB}} \times \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{DC}} \times \frac{\mathbf{CE}}{\mathbf{EA}} = \mathbf{1}$$

が成り立つ。

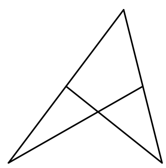
［図 1］



［図 2］



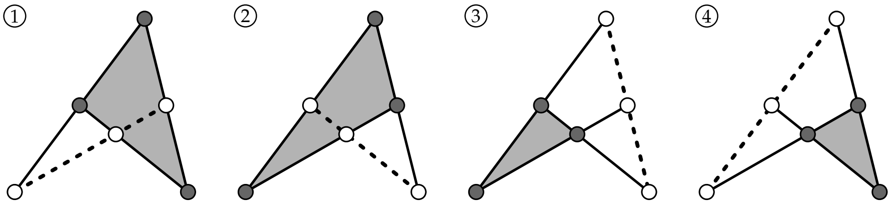
【 メネラウスの図形 】



「メネラウスの定理」を使えば，右の図（以後「メネラウスの図形」と呼ぶ）を構成する 4 直線のうちの 2 本について線分比がわかっているとき，残る 2 本の直線の線分比を求めることができる。

4 本の直線から 3 本を選ぶ方法は ${}_4C_3$ 通り，すなわち 4 通りある。それをすべて図示すると次の図のようになる。

「メネラウスの図形」内の 3 直線の選び方（全 4 通り）

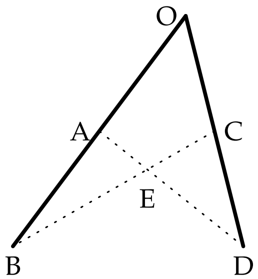


基本例題 A–1.

右図で，OA : AB = 2 : 1，OC : CD = 1 : 1 であるとき，

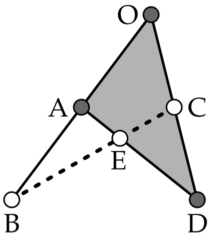
(1) AE : ED を求めよ。

(2) BE : EC を求めよ。

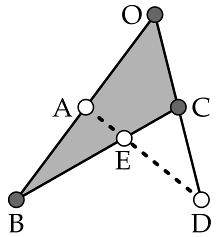


（解法）

(1)



(2)

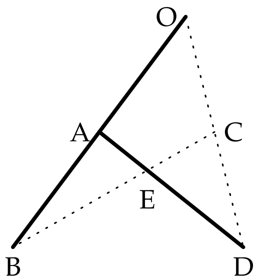


基本例題 A–2.

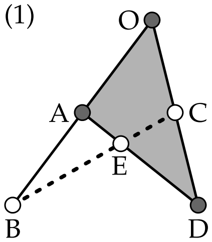
右図で，OA : AB = 2 : 1，AE : ED = 1 : 2 であるとき，

(1) OC : CD を求めよ。

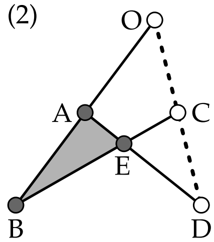
(2) BE : EC を求めよ。



（解法） (1)



(2)

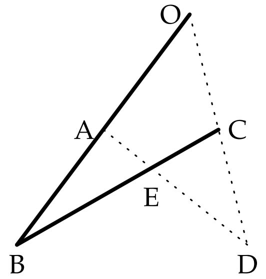


基本例題 A–3.

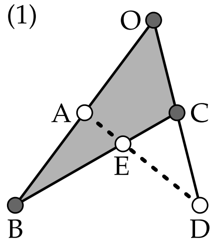
右図で，OA : AB = 2 : 1，BE : EC = 1 : 1 であるとき，

(1) OC : CD を求めよ。

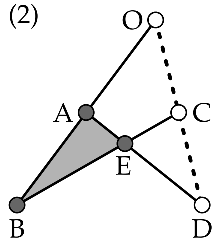
(2) AE : ED を求めよ。



（解法） (1)



(2)

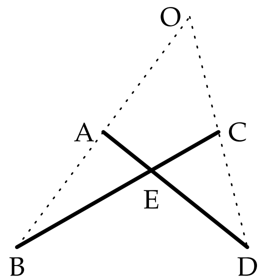


基本例題 A–4.

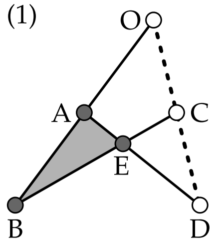
右図で，AE : ED = 1 : 3，BE : EC = 2 : 1 であるとき，

(1) OA : AB を求めよ。

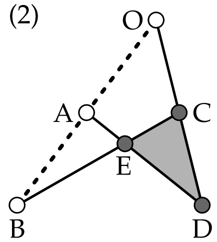
(2) OC : CD を求めよ。



（解法） (1)



(2)



§ 3.　チェバの定理

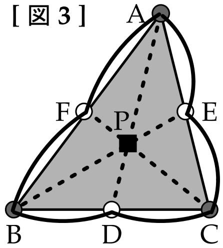
チェバの定理

3 点 D，E，F をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の 内分点 または 外分点 とするとき，**3 直線 AD，BE，CF が共点であるならば**，**等式**

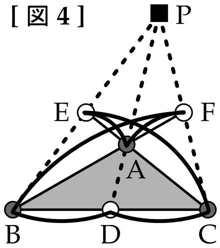
$$\boldsymbol{\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1}$$

が成り立つ。

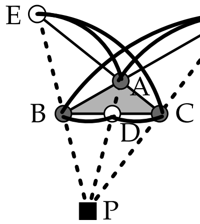
[図 3]



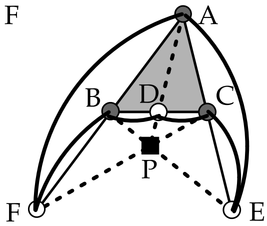
[図 4]



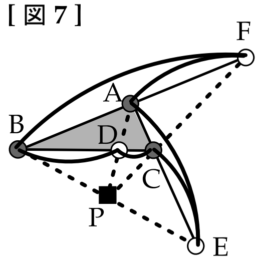
[図 5]



[図 6]



[図 7]



〔チェバの定理の証明〕

メネラウスの定理より，

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BC}{CD} \times \frac{DP}{PA} = 1,$$

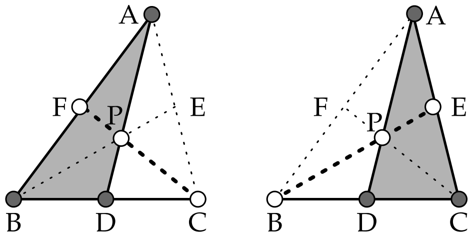
$$\frac{AP}{PD} \times \frac{DB}{BC} \times \frac{CE}{EA} = 1.$$

この 2 式を辺々かけて整理すれば，

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

となる。　**〔証明終〕**

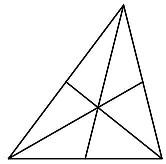
[図 3] の場合（他も同様）



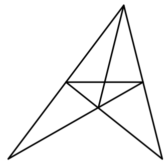
前ページの〔証明〕は，「チェバの定理で求められる線分比は，メネラウスの定理を 2 回適用して求めることができる」ということを意味している（→#15 ページ）。したがって，実は，メネラウスの定理さえ知っていれば，チェバの定理は必ずしも必須ではない。（もちろん知っていた方がよいが，チェバの定理はメネラウスの定理よりも複雑なので，無理にすべてを覚えようとする必要はない。）

「チェバの定理」と「メネラウスの定理」を使えば，右の図（以後「チェバの図形」と呼ぶ）を構成する 6 直線のうちの 2 本について線分比がわかっているとき，残る 4 本の直線の線分比を求めることができる（実際には，メネラウスの定理だけで全て求められる）。

【 チェバの図形① 】



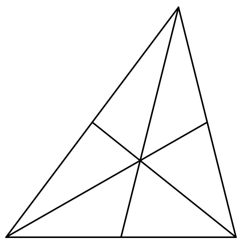
【 チェバの図形② 】



6 本の直線から 3 本を選ぶ方法は ${}_6C_3$ 通り，すなわち 20 通りある。それをすべて図示すると，#8～#9 ページの図のようになる。

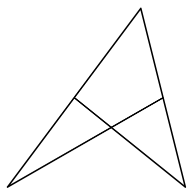
なお，「**チェバの図形①**」および「**チェバの図形②**」に次の 3 つの「**メネラウスの図形**」が含まれていることに注意すれば，⑤～⑧，⑨～⑫，⑬～⑯ はいずれも § 2. で述べたことを繰り返しているに過ぎない。

【 チェバの図形① 】

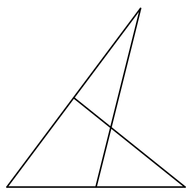


⊃

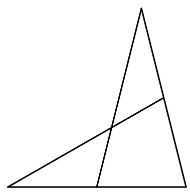
【 メネラウスの図形 】



(⑤～⑧)

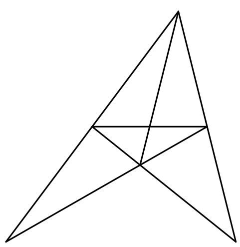


(⑨～⑫)



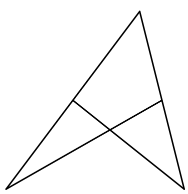
(⑬～⑯)

【 チェバの図形② 】

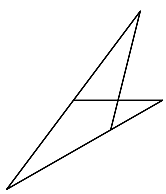


⊃

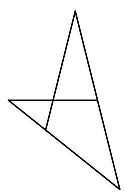
【 メネラウスの図形 】



(⑤～⑧)

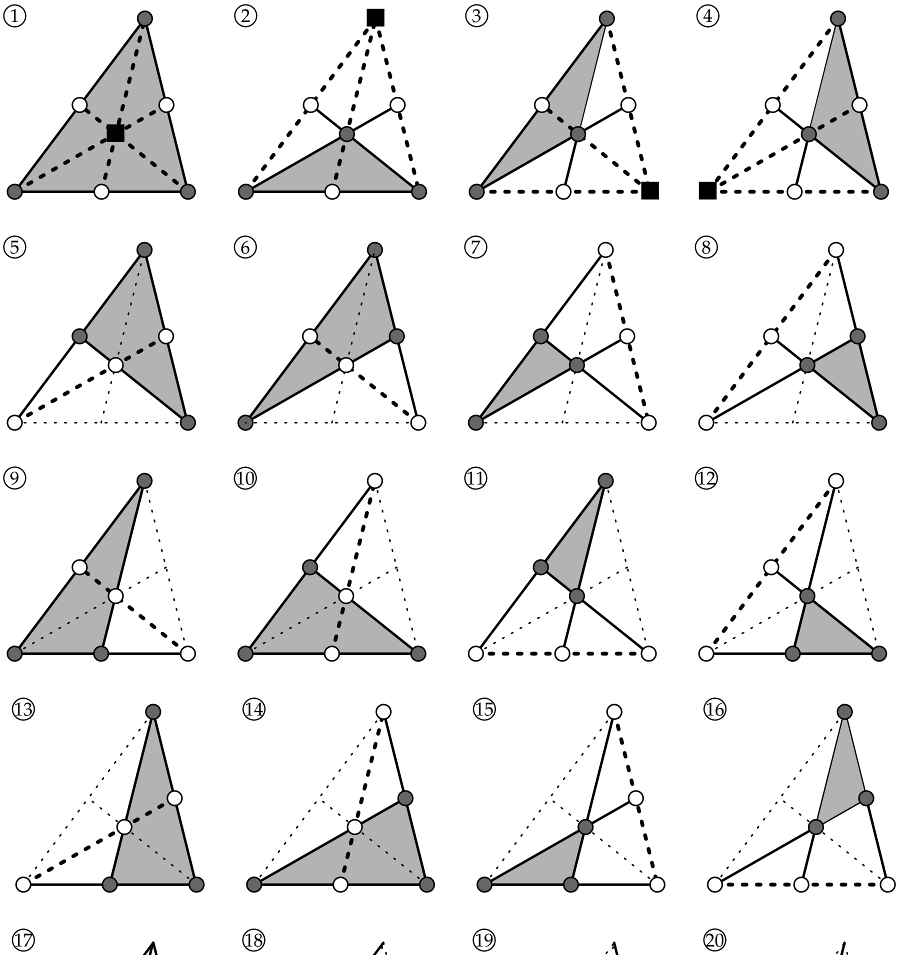


(⑨～⑫)



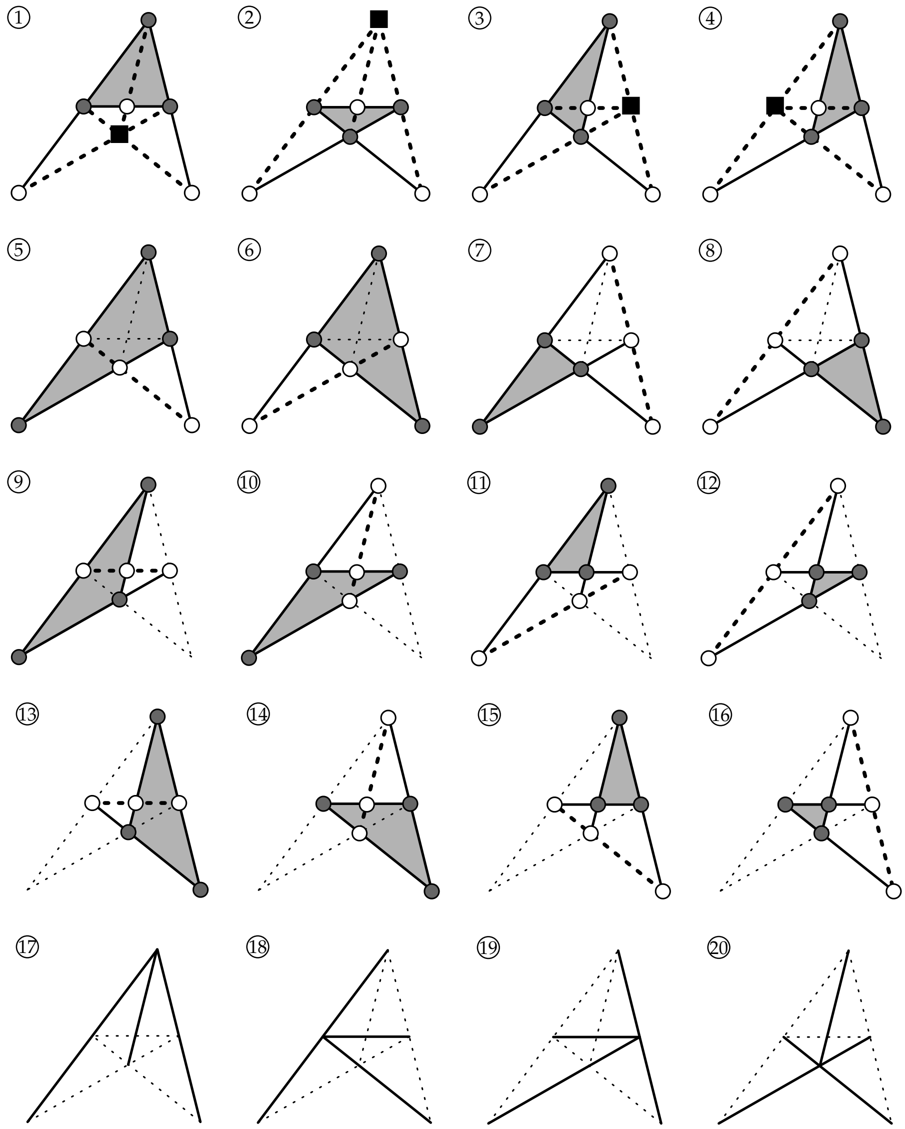
(⑬～⑯)

チェバの図形①内の 3 直線の選び方（全 20 通り）



これらのうち，①～④は「**チェバの定理**」，⑤～⑯は「**メネラウスの定理**」を用いる。残りの ⑰～⑳ は 3 直線が「**共点**」となり，三角形が作られない。

チェバの図形②内の 3 直線の選び方（全 20 通り）



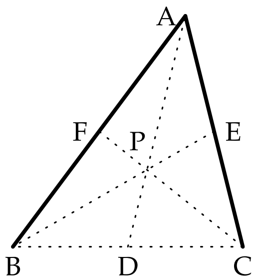
これらのうち，①～④は「**チェバの定理**」，⑤～⑯は「**メネラウスの定理**」を用いる。残りの ⑰～⑳ は 3 直線が「**共点**」となり，三角形が作られない。

基本例題 B–1.

右図で，AF : FB = 1 : 2，AE : EC = 2 : 1 であるとき，

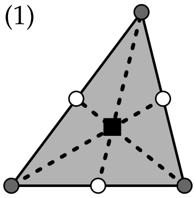
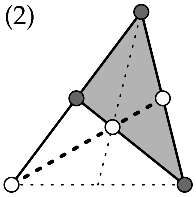
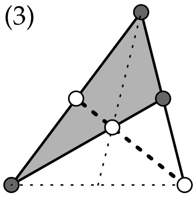
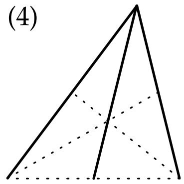
(1) BD : DC を求めよ。　(2) FP : PC を求めよ。

(3) BP : PE を求めよ。　(4) AP : PD を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 3]** 型のチェバ三角形，(2) と (3) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形である。

(1)

(2)

(3)

(4)


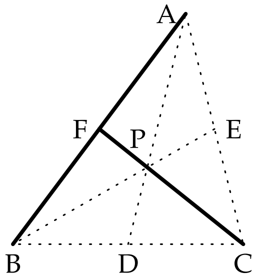
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 B–2.

右図で，AF : FB = 1 : 2，FP : PC = 1 : 2 であるとき，

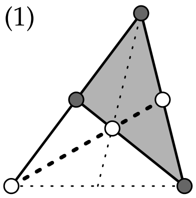
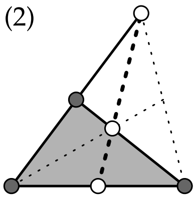
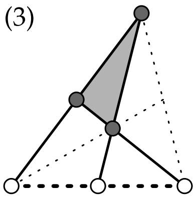
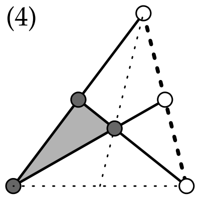
(1) AE : EC を求めよ。　(2) BD : DC を求めよ。

(3) AP : PD を求めよ。　(4) BP : PE を求めよ。



（解法）

(1) と (2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) と (4) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

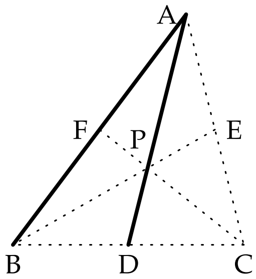
(1)

(2)

(3)

(4)


基本例題 B–3.

右図で，AF : FB = 1 : 2，AP : PD = 1 : 1 であるとき，

(1) BP : PE を求めよ。　(2) BD : DC を求めよ。

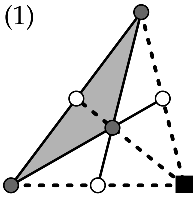
(3) FP : PC を求めよ。　(4) AE : EC を求めよ。



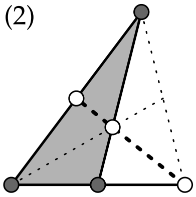
（解法）

(1) は **[図 4]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

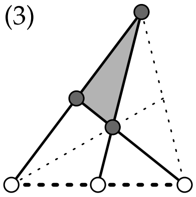
(1)



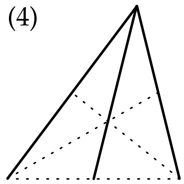
(2)



(3)



(4)



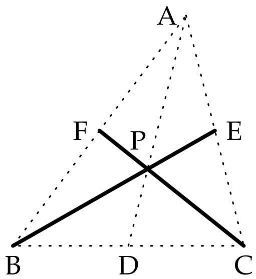
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 B–4.

右図で，FP : PC = 1 : 3，BP : PE = 3 : 2 であるとき，

(1) BD : DC を求めよ。　(2) AF : FB を求めよ。

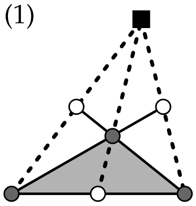
(3) AE : EC を求めよ。　(4) AP : PD を求めよ。



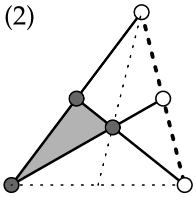
（解法）

(1) は **[図 4]** 型のチェバ三角形，(2) と (3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

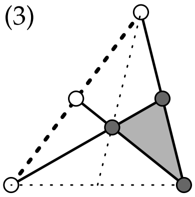
(1)



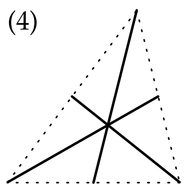
(2)



(3)



(4)



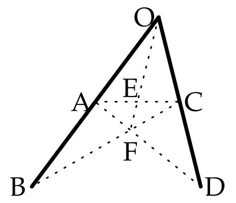
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C–1.

右図で，OA : AB = 2 : 1，OC : CD = 1 : 3 であるとき，

(1) AE : EC を求めよ。　(2) AF : FD を求めよ。

(3) BF : FC を求めよ。　(4) OE : EF を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 6]** 型のチェバ三角形，(2) と (3) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形である。

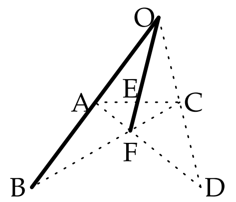
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C–2.

右図で，OA : AB = 1 : 1，OE : EF = 3 : 1 であるとき，

(1) AF : FD を求めよ。　(2) BF : FC を求めよ。

(3) AE : EC を求めよ。　(4) OC : CD を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 7]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

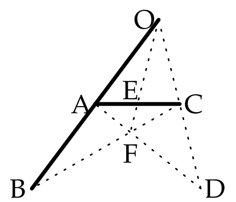
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C–3.

右図で，OA : AB = 2 : 1，AE : EC = 1 : 2 であるとき，

(1) OC : CD を求めよ。　(2) BF : FC を求めよ。

(3) OE : EF を求めよ。　(4) AF : FD を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 6]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

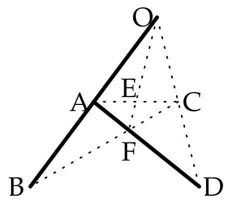
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C–4.

右図で，OA : AB = 2 : 1，AF : FD = 1 : 2 であるとき，

(1) OE : EF を求めよ。　(2) OC : CD を求めよ。

(3) BF : FC を求めよ。　(4) AE : EC を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 7]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

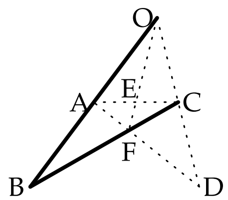
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C–5.

右図で，OA : AB = 1 : 1，BF : FC = 3 : 1 であるとき，

(1) OC : CD を求めよ。　(2) OE : EF を求めよ。

(3) AE : EC を求めよ。　(4) AF : FD を求めよ。



（解法）

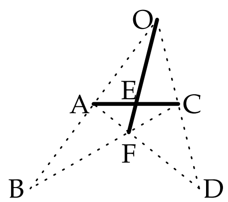
(1) と (2) と (3) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(4) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

基本例題 C–6.

右図で，OE : EF = 2 : 1，AE : EC = 1 : 2 であるとき，

(1) OA : AB を求めよ。　(2) OC : CD を求めよ。

(3) AF : FD を求めよ。　(4) BF : FC を求めよ。



（解法）

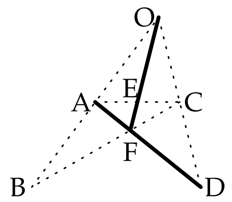
(1) から (4) まで，すべて **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

基本例題 C–7.

右図で，OE : EF = 2 : 1，AF : FD = 1 : 3 であるとき，

(1) OA : AB を求めよ。 (2) OC : CD を求めよ。

(3) AE : EC を求めよ。 (4) BF : FC を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 7]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

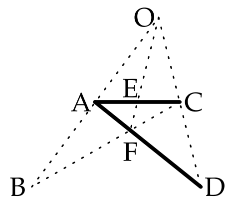
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C–8.

右図で，AE : EC = 1 : 1，AF : FD = 1 : 3 であるとき，

(1) BF : FC を求めよ。 (2) OC : CD を求めよ。

(3) OE : EF を求めよ。 (4) OA : AB を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 5]** 型のチェバ三角形，(2) は **[図 1]** 型のメネラウス三角形，(3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

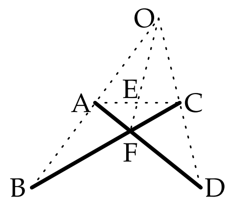
(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C–9.

右図で，AF : FD = 1 : 2，BF : FC = 3 : 2 であるとき，

(1) AE : EC を求めよ。 (2) OA : AB を求めよ。

(3) OC : CD を求めよ。 (4) OE : EF を求めよ。



（解法）

(1) は **[図 5]** 型のチェバ三角形，(2) と (3) は **[図 2]** 型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)〜(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

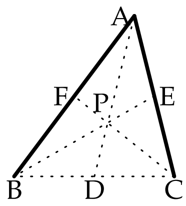
§ 4.　チェバの定理を使わない「別解」

#7 ページで指摘しておいた通り，「チェバの定理」で求められる線分比は，「メネラウスの定理」を **2** 回適用して求めることができる。

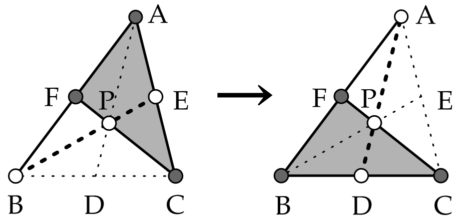
基本例題 B–1.（再掲）

右図で，AF : FB = 1 : 2，AE : EC = 2 : 1 であるとき，

(1) BD : DC を求めよ。



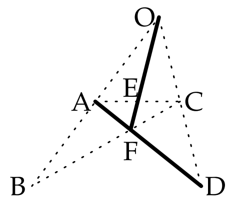
（別解）　まず下図左のように △ACF を「メネラウス三角形」と見立てて FP : PC を求めてから，その次に，下図右のように △BCF を「メネラウス三角形」と見立てて BD : DC を求める。



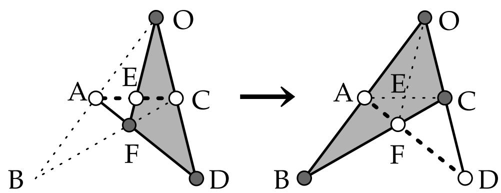
基本例題 C–7.（再掲）

右図で，OE : EF = 2 : 1，AF : FD = 1 : 3 であるとき，

(1) OA : AB を求めよ。



（別解）　まず下図左のように △ODF を「メネラウス三角形」と見立てて OC : CD を求めてから，その次に，下図右のように △OBC を「メネラウス三角形」と見立てて OA : AB を求める。



このように，「チェバの定理」で求められる線分比は，代わりに「メネラウスの定理」を **2** 回適用して求めることもできるので，「メネラウスの定理」の方が「チェバの定理」よりも基本的であると言える。